
Discrete Mathematics
离散
数学
吴秀兰 冯毅夫 朱宏 编著
清华大学出版社

离 散 数 学

吴秀兰　冯毅夫　朱　宏　编著

清 华 大 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书共分 8 章,分别为命题逻辑、一阶逻辑、集合、二元关系和函数、代数系统、格与布尔代数、图论和树.在结构体系上,本书首先介绍数理逻辑及集合相关内容;其次介绍关系及代数系统;最后介绍图论与树的相关知识及应用.每一章的内容介绍之后都选配了适量的习题,做到少而精,注意突出重点.便于学生理解和掌握抽象理论和方法.

本书不仅可作为高等院校数学、计算机科学与技术及相关专业的教材,也可作为从事计算机工作的相关人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/吴秀兰,冯毅夫,朱宏编著. —北京:清华大学出版社,2018
ISBN 978-7-302-51454-1

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①吴…　②冯…　③朱…　Ⅲ.①离散数学　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 243445 号

责任编辑:刘　颖
封面设计:傅瑞学
责任校对:王淑云
责任印制:宋　林

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京国马印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:10　　**字　　数**:239 千字
版　　次:2018 年 11 月第 1 版　　**印　　次**:2018 年 11 月第 1 次印刷
定　　价:29.80 元

产品编号:072732-01

目录

第1章

命题逻辑

离散数学的基础与重要组成部分是数理逻辑,数理逻辑是形式逻辑与数学相结合的产物,它采用数学符号化的方法,给出推理规则来建立推理体系,进而讨论推理体系的一致性、可靠性和完备性等. 本书中数理逻辑的研究内容主要包括命题逻辑、一阶谓词逻辑.

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题与真值

定义 1.1.1 具有确切真值的陈述句,称作**命题**. 陈述句的判断为真或假,称为命题的**真值**. 真值为真,称为真命题,记为 1(或 T);真值为假,称为假命题,记为 0(或 F).

注 (1) 命题首先必须是陈述句. 其他的如疑问句、祈使句和感叹句等均不是命题,但是不是所有的陈述句都是命题.

(2) 若陈述句的判断由于条件的限制暂时不能判别其真假,但陈述句的真假是客观存在的,则仍是命题.

定义 1.1.2 由简单陈述句表达的命题,称为**简单命题**或**原子命题**. 由若干简单命题通过**命题联结词**联结而构成的命题,称为**复合命题**.

例 1.1.1 判别下列语句是否为命题,若是命题,请判断是真命题还是假命题.

(1) $\sqrt{3}$是无理数.

(2) $x>y$.

(3) $2+1=11$.

(4) 物质决定意识.

(5) 商场开门了吗?

(6) 认真地读一下.

(7) 秋天的景色真美丽啊!

(8) 你是好人.

(9) 这个命题是假的.

(10) 金星上有水.

解 (1) 是真命题. (2)不是命题. (3)是假命题. (4)是命题,但辩证唯物主义者认为是真命题,形而上学者认为是假命题. (5)、(6)、(7)、(8)都不是命题,(5)是疑问句,(6)是祈使句,(7)是感叹句,(8)"好人"是模糊的概念. (9)是悖论,若(9)为真,即"这个命题是假的"是

真的，则这个命题是真的，因而(9)的真值应为假，矛盾；反之，若(9)为假，即“这个命题是假的”是假的，则这个命题是假的，因而(9)的真值应为真，同样也矛盾，因而像(9)这样既不能为真、也不能为假的陈述句称为悖论，悖论不是命题. (10)是命题，真值暂时不能确定，但是本身具有确切的真值.

为了研究方便，需要用数学方法将命题符号化. 命题一般用大写英文字母 $P,Q,R,\cdots$(或带下标)表示. 一个恒真命题可以用 1 表示，恒假命题可用 0 表示.

例 1.1.2 将下列命题符号化，并指出它们的真值.

(1) 2 是素数是不对的.

(2) 2 是偶素数.

(3) 2 或 3 是素数.

(4) 如果 2 是素数，则 3 也是素数.

(5) 2 是素数当且仅当 3 也是素数.

解 以上 5 个命题实际上是由 3 个原子命题组成的，将它们分别符号化为

P：2 是素数. Q：2 是偶数. R：3 是素数.

P,Q,R 的真值均为 1，把原子命题的符号代入，上述命题可表示为

(1) 非 P；(2) P 并且 Q；(3) P 或 R；(4) 如果 P，则 R；(5) P 当且仅当 R.

定义 1.1.3 当 P 表示确定的命题时，称 P 为**命题常元**，当 P 表示任意的没有赋予具体内容的抽象命题时，称为**命题变元**.

注 命题变元不是命题，当一个命题变元 P 表示一个特定的命题时，它才是命题并且有确定的真值.

1.1.2 命题联结词

命题逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化，即构造各种符号语言来代替自然语言，我们称完全由符号所构成的语言为形式语言. 为了达到这个目的，就要求进一步抽象化，即将联结词也符号化. 自然语言中的联结词，如“或”“并”“与”“且”“然而”“但是”等一般没有严格的定义，常常具有歧义性，为了避免自然语言中的不确定性，需要将自然语言中的联结词符号化并给出严格的定义.

下面介绍五种基本联结词及其对应的**真值表**.

1. 否定“$\neg$”

定义 1.1.4 设 P 为命题，复合命题“非 P”(或“P 的否定”)称为 P 的否定式，记作$\neg P$，符号$\neg$称为否定联结词. 逻辑关系规定：$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假. 真值表见表 1.1.1.

在例 1.1.2 中，“非 P”可符号化为$\neg P$. 由于 P 的真值为 1，所以$\neg P$ 的真值为 0.

否定联结词，它否定命题的全部. 例如

P：汉语是中国的官方语言.

$\neg P$：汉语不是中国的官方语言.

表 1.1.1

$\neg P$ 的真值表

P	$\neg P$
0	1
1	0

2. 合取“$\wedge$”

定义 1.1.5 设 P 和 Q 是两个命题，复合命题“P 并

且 Q”(或“P 与 Q”),称为 P 与 Q 的合取式,记作 $P\wedge Q$,$\wedge$ 称作合取联结词. 逻辑关系规定:$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真. 真值表见表 1.1.2.

表　1.1.2

$P\wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

注　(1) 自然语言中的“虽然…,但是…”“一面…,一面…”“既…,又…”“不但…,而且…”等都表示两件事情同时成立,可以符号化为 $\wedge$.

(2) 有一些文字“与”“和”不能使用联结词 $\wedge$.

例 1.1.3　将下列命题符号化.

(1) 李平既是文科生又是优秀学生.

(2) 李平虽然是文科生但不是优秀学生.

(3) 这是一张椅子并且 $3+2=6$.

(4) 李平与张红都是保送生.

(5) 李平与张红是同学.

解　先给出(1)～(4)中的原子命题,并将其符号化:

P:李平是文科生.

Q:李平是优秀学生.

R:这是一张椅子.

S:$3+2=6$.

T:李平是保送生.

U:张红是保送生.

(1)～(4)可分别符号化为 $P\wedge Q$,$P\wedge\neg Q$,$R\wedge S$,$T\wedge U$.

但在(5)中,这个“与”是联结该句主语中的两个人的,整个句子仍是简单陈述句,因此(5)是原子命题,符号化为

V:李平与张红是同学.

例 1.1.3 中的(3)在自然语言中是没有意义的,但命题逻辑中 $R\wedge S$ 仍成为一个新命题,按照定义,R,S 取值后,$R\wedge S$ 的值也确定了,这是与自然语言不同之处.

3. 析取“$\vee$”

定义 1.1.6　设 P,Q 为两命题,复合命题“P 或 Q”称作 P 与 Q 的**析取式**,记作 $P\vee Q$,$\vee$ 称作**析取联结词**,逻辑关系规定:$P\vee Q$ 为假当且仅当 P 与 Q 同时为假. 真值表见表 1.1.3.

表 1.1.3

$P \vee Q$ 的真值表		
P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取联结词∨与自然语言中的“或”不完全一样.自然语言中的“或”具有二义性,它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真),有时具有排斥性(即当一个为真、另一个就为假),对应的分别称为相容或和排斥或,注意区别.

例 1.1.4 (1) 开关坏了或灯泡坏了.

P:开关坏了.

Q:灯泡坏了.

(2) 张三或者李四考了 90 分.

P:张三考了 90 分.

Q:李四考了 90 分.

显然(1) 和(2) 中的两个“或”为相容或,符号化为 $P \vee Q$.

(3) 王丽在教室上课或在图书馆读书.

P:王丽在教室上课.

Q:王丽在图书馆读书.

(4) 2016 年 5 月 11 日第一节课上历史课或者上地理课.

P:2016 年 5 月 11 日第一节课上历史课.

Q:2016 年 5 月 11 日第一节课上地理课.

由题意知,(3) 和(4) 中的两个或是排斥或,可形式化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

注 在自然语言符号化的过程中,不能见了“或”就表示为 $P \vee Q$.

4. 蕴含“→”(条件联结词)

定义 1.1.7 设 P,Q 为两命题,复合命题“如果 P,则 Q”称作 P 与 Q 的**蕴含式**,记作 $P \rightarrow Q$,并称 P 是蕴含前件,Q 为蕴含后件,→为蕴含联结词.逻辑关系规定:$P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真,Q 为假.真值表见表 1.1.4.$P \rightarrow Q$ 的逻辑关系表示 P 是 Q 的充分条件.

表 1.1.4

$P \rightarrow Q$ 的真值表		
P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

注　(1) 在自然语言中，P 是 Q 的充分条件有许多不同的叙述方式，例如"只要 P，就 Q""因为 P，所以 Q""只有 Q 才 P""除非 Q 才 P""除非 Q，否则非 P"等，以上都应使用$\rightarrow$，符号化为 $P\rightarrow Q$.

(2) $P\rightarrow Q$ 真值的确定与自然语言表达的意义是有区别的. 在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义往往无法判定. 但在命题逻辑中，当 P 为 0 时，$P\rightarrow Q$ 恒为 1.

(3) 自然语言中前件、后件一般来说有因果关系，命题逻辑中允许前件、后件无任何联系.

例 1.1.5　把下列语句写成"如果 P，那么 Q"的形式.

(1) 刮北风的时候就降温.

(2) 温度上升到零度以上冰就融化了.

(3) 中国队赢得冠军就意味着他们打败了巴西队.

(4) 必须走 8km 才能到宾馆.

(5) 如果你在高速上驾车超过 4h，就需要加油了.

解　(1) 如果刮北风就降温.

(2) 如果温度上升到零度以上，冰就融化了.

(3) 如果中国队赢得冠军，他们就打败了巴西队.

(4) 如果你到了宾馆，那你就已经走了 8km.

(5) 如果你在高速上驾车超过 4h，就需要加油了.

例 1.1.6　将下列命题符号化，并指出复合命题的真值.

(1) 如果 $3>4$，则天是蓝的.

(2) 如果 $3\leqslant 4$，则天不是蓝的.

(3) 只有 $3\leqslant 4$，天才是蓝的.

解　令 P：$3>4$，Q：天是蓝的. (1)、(2)、(3)符号化为

$$P\rightarrow Q, \neg P\rightarrow \neg Q, \neg Q\rightarrow \neg P.$$

它们的真值分别为 1，0，1.

例 1.1.7　以下命题中出现的 a 是一个给定的正整数，试将命题符号化并判断真值.

(1) 只要 a 能被 4 整除，则 a 一定能被 2 整除.

(2) a 能被 4 整除，仅当 a 能被 2 整除.

(3) 除非 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除.

(4) 除非 a 能被 2 整除，否则 a 不能被 4 整除.

(5) 只有 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除.

(6) 只有 a 能被 4 整除，a 才能被 2 整除.

解　令 P：a 能被 4 整除 Q：a 能被 2 整除.

(1)～(5)这五个命题均叙述的是"a 能被 4 整除"是"a 能被 2 整除"的充分条件，因而都符号化为 $P\rightarrow Q$. 其真值为 1.

在(6)中，将"a 能被 2 整除"看成了"a 能被 4 整除"的充分条件，因而应符号化为 $Q\rightarrow P$. a 值不定时，真值未知.

5. 等价"$\leftrightarrow$"(双条件)

定义 1.1.8　设 P，Q 为两命题，复合命题"P 当且仅当 Q"，称为 P 与 Q 的**等价式**，记作

$P \leftrightarrow Q$. $\leftrightarrow$称作**等价联结词**,逻辑关系规定:$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真或同时为假,即 P 与 Q 互为充要条件. 真值表见表 1.1.5.

表 1.1.5

$P \leftrightarrow Q$ 的真值表		
P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由定义知,$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$与 $P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系一致.

例 1.1.8 将下列命题符号化,并给出它们的真值.

(1) $\sqrt{3}$是无理数,当且仅当埃及是欧洲国家.

(2) 若圆 O_1,圆 O_2 面积相等当且仅当它们的半径相等.

解 (1) 令

P:$\sqrt{3}$是无理数,其真值为 1. Q:埃及是欧洲国家,其真值为 0.

则(1) 符号化为 $P \leftrightarrow Q$,其真值为 0.

(2) 令

R:圆 O_1,圆 O_2 面积相等. S:圆 O_1,圆 O_2 半径相等.

则(2)符号化为 $R \leftrightarrow S$. 虽不知道 R,S 的真值,但由 R,S 的内在联系知 $R \leftrightarrow S$ 的真值为 1.

以上介绍了五种基本联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,由一个或两个原子命题使用五种联结词中的一个组成的复合命题称为**基本复合命题**. 多次使用这几种联结词并加括号可以构成更为复杂的复合命题. 求复杂的复合命题的真值依据真值表 1.1.1～表 1.1.5,还要规定括号与联结词运算的优先顺序,通常的运算顺序为( ), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,对同一级联结词,从左至右运算.

1.2 命题公式及其解释

1.2.1 命题公式

将命题变元用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为命题公式(或合式公式).

定义 1.2.1 命题公式的递归定义:

(1) 单个的命题变元和命题常元是命题公式,并可以称为原子命题公式;

(2) 如果 A 和 B 是命题公式,则$\neg A$,$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$与$(A \leftrightarrow B)$也是命题公式;

(3) 有限次地应用(1)、(2)形成的符号串是命题公式(简称公式).

上述递归形式的定义以后还会多次出现.

例 1.2.1 $(P \vee Q) \to (\neg P \leftrightarrow Q \wedge R)$是命题公式，它通过以下步骤生成：

(1) P 是公式；

(2) Q 是公式；

(3) $(P \vee Q)$是公式；

(4) $(\neg P)$是公式；

(5) R 是公式；

(6) $(Q \wedge R)$是公式；

(7) $((\neg P) \leftrightarrow (Q \wedge R))$是公式；

(8) $((P \vee Q) \to ((\neg P) \leftrightarrow (Q \wedge R)))$是公式.

例 1.2.2 判断下列命题是否为命题公式.

(1) $(P \wedge Q) \to \neg(Q \vee S)$.

(2) $((R \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.

(3) $(R \to P) \wedge$.

(4) $P \wedge (R \to)$.

解 (1)、(2) 是命题公式；(3)、(4) 不是.

对于定义 1.2.1，要做以下说明：

(1) 命题公式是没有真假的，只有公式中的全部命题变元都用确定的命题代换时，才成为命题，这时才有真值，真值的确定依赖于代换变元的那些命题的真值.

(2) 定义中引进了 A 和 B 等符号，用它们代表任意的合式公式，而不是具体公式，A 和 B 称作**元语言**符号，具体公式中的符号称作**对象语言**符号. 所谓对象语言指用来描述研究对象的语言，而元语言指描述对象语言的语言，这是两种不同层次的语言. 如中国人学习英语时，英语为对象语言，而用来学习英语的汉语就是元语言.

1.2.2 命题的符号化

由于通常对一些命题及推理是用自然语言表达的，首先需要把自然语言形式化为逻辑语言，即用符号表示命题公式. 这一过程称为命题符号化。

把命题符号化时要注意以下几点：

(1) 确定简单命题；

(2) 识别辨析自然语言中的联结词，甚至被省略了的联结词；

(3) 自然语言常常带有歧义性，人们可能对同一语句有不同的理解，导致对同一语句的不等价描述.

例 1.2.3 如果你吃饭时喝凉水，你就会得胃病.

解 令 P：你吃饭，Q：你喝凉水，R：你得胃病. 命题符号化为

$$(P \wedge Q) \to R.$$

例 1.2.4 如果周日天气好，我们就去长白山旅游，否则就不去了.

解 设 P：周日天气好，Q：我们去长白山旅游. 命题符号化为

$$(P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q) \quad \text{或者} \quad P \leftrightarrow Q.$$

例 1.2.5 李杰只能选择上海或北京一个地方签约.

解 设 P：李杰选择上海签约，Q：李杰选择北京签约. 命题符号化为

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

例 1.2.6 如果你和他都不违反纪律,那么你们都不会受到处罚.

解 设 P:你违反纪律,Q:他违反纪律,R:你会受到处罚,S:他会受到处罚. 命题符号化为

$$(\neg P \wedge \neg Q) \to (\neg R \wedge \neg S).$$

1.2.3 公式的赋值及真值表

定义 1.2.2 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变元,为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 各指定一个值(0 或 1),称为对 A 的一个**赋值**. 若指定的一组值使 A 的真值为 1,则称这组值为 A 的**成真赋值**,若使 A 的真值为 0,则称这组值为**成假赋值**.

可以得到,含 $n(n \geqslant 1)$ 个命题变元的公式共有 2^n 个不同的赋值. 公式的真值常用真值表表示.

定义 1.2.3 将公式 A 的所有可能的真值赋值所取的真值列成表,称为**真值表**.

真值表构造步骤如下:

(1) 找出公式中所有命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$(无角标时按字典顺序排列),列出 2^n 组赋值,这里规定从 00…0 开始,按二进制依次加 1 写出每个赋值,直到 11…1 为止.

(2) 对应各赋值计算出各层次的真值,最后计算出公式的真值,公式的真值在最后一列.

公式 A 与 B 具有相同或不同的真值表,是指真值表最后一列是否相同,而不考虑中间过程.

真值表的构造请看例题.

例 1.2.7 构造下列公式的真值表,并求它们的成真赋值和成假赋值.

(1) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

(2) $(\neg P \wedge Q) \to \neg R$.

(3) $\neg(P \to Q) \wedge Q \wedge R$.

解 公式(1)的真值表如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

P	Q	$(\neg P \vee Q)$	$(P \to Q)$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

由表 1.2.1 可知,4 个赋值都是成真赋值,无成假赋值.

公式(2)的真值表如表 1.2.2 所示.

表 1.2.2

P	Q	R	$(\neg P \wedge Q)$	$\neg R$	$(\neg P \wedge Q) \to \neg R$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1

续表

P	Q	R	$(\neg P\wedge Q)$	$\neg R$	$(\neg P\wedge Q)\to\neg R$
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1

由表 1.2.2 可知,成假赋值为 011,其余 7 个赋值全是成真赋值.

公式(3)的真值表如表 1.2.3 所示.

表　1.2.3

P	Q	R	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\wedge Q$	$\neg(P\to Q)\wedge Q\wedge R$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

由表 1.2.3 可知,8 个赋值全是成假赋值,没有成真赋值.

真值表的信息是丰富的,从真值表上可以看出哪些是成真赋值,哪些是成假赋值.

定义 1.2.4　设 A 为命题公式,若 A 的任意一组赋值取值恒为 1,则称公式 A 为**重言式**,或**永真式**,常用 1 表示;若 A 的任意一组赋值取值恒为 0,则称 A 为**矛盾式**或**永假式**,常用 0 表示;如果至少有一组赋值使 A 的值为 1,则称公式 A 为**可满足式**.

由表 1.2.1～表 1.2.3 可知,在例 1.2.7 中,公式(1)为重言式,公式(2)为非重言式的可满足式,公式(3)为矛盾式.

由定义知,重言式的否定是矛盾式,矛盾式的否定是重言式;重言式是可满足式,可满足式不一定是重言式;存在非重言式的可满足式. 由真值表可判定公式的类型. 如真值表最后一列全为 1,公式为重言式;最后一列全为 0,公式为矛盾式;最后一列至少有一个 1,公式为可满足式.

按照公式的形成规则,n 个命题变元有无穷多个形式各异的公式,那么所有公式的真值表有多少种? 真值表的不同情况只有 2^{2^n} 种. 事实上 n 个命题变元共有 2^n 个不同的赋值,而任何公式在每个赋值下只可能取两个真值 0 或 1,于是含有 n 个命题变元的真值表只有 2^{2^n} 种不同的情况,因此必有无穷多个公式具有相同的真值表.

1.3 命题公式的等值演算

1.3.1 命题公式的等值式

命题演算是命题逻辑的基本运算,等值式是演算的基础.

定义 1.3.1 设 A,B 为命题公式,若 $A\leftrightarrow B$ 为重言式,则称 A 与 B **等值**,记作 $A\Leftrightarrow B$,此时称 $A\leftrightarrow B$ 为**等价重言式**.

A 与 B 等值,当且仅当 A 与 B 有相同的真值表. 真值表是判断两个公式是否等值的一种重要方法.

注 符号⇔不是联结词符号,而是公式间的关系符号. $A\Leftrightarrow B$ 不表示公式,而表示 A 与 B 具有逻辑等价关系. $A\leftrightarrow B$ 是一个公式.

公式间的关系"⇔"是一个等价关系,它满足:(1)自反性,(2)对称性,(3)传递性. 利用这个关系可以将全部公式进行分类.

例 1.3.1 判断 $\neg(P\wedge Q)$ 与 $\neg P\vee\neg Q$ 是否等值.

解 由真值表 1.3.1,$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$ 是重言式,所以是等值的.

表 1.3.1

P	Q	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

基本等值式.

(1) 双重否定 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$.

(2) 幂等律 $A\Leftrightarrow A\vee A$, $A\Leftrightarrow A\wedge A$.

(3) 交换律 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$.

(4) 结合律 $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$, $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$.

(5) 分配律 $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.

(6) 吸收律 $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$.

(7) 零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$.

(8) 同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$.

(9) 德摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$.

(10) 矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$.

(11) 排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$.

(12) 蕴含等值式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$, $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$.

(13) 等值等价式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$, $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$.

(14) 归谬论 $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$.

以上 14 组 24 个等值式是经常使用的等值式，是逻辑代数的重要组成部分，可由其真值表验证.

1.3.2 代入规则与替换规则

定义 1.3.2 由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称为**等值演算**.

等值演算是逻辑代数的重要内容，并有重要应用. 等值演算不断使用代入规则与替换规则.

1. 代入规则

定理 1.3.1 在重言式 A 中，任何命题变元 p_i 出现的每一处，用另一公式代入，所得公式 B 仍是重言式. 这就是代入规则.

证明 因重言式对任何赋值，其值均为 1，与所给的某个命题变元赋值的真值是 0 还是 1 无关. 因此用一个命题公式代入命题变元 p_i 出现的每一处，所得公式的真值仍为 1.

例 1.3.2 求证 $(A\rightarrow B)\vee\neg(A\rightarrow B)$ 为重言式.

证明 由互补律 $P\vee\neg P\Leftrightarrow 1$，即 $P\vee\neg P$ 为重言式. 用公式 $A\rightarrow B$ 代入公式中的 P，则得 $(A\rightarrow B)\vee\neg(A\rightarrow B)$，由代入规则知，给定的公式是重言式.

注 若仅把 $A\rightarrow B$ 代入到一个析取项 P，而得到 $(A\rightarrow B)\vee\neg P$，显然它不是重言式，因为不符合代入规则的"处处代入".

定义 1.3.3 若 C 是公式 A 中的一个连续部分，而 C 本身也是公式，称 C 为 A 的**子公式**.

例如公式 A 为 $(P\wedge Q)\rightarrow(Q\vee(R\wedge\neg S))$，则 $P\wedge Q$, $R\wedge\neg S$, $Q\vee(R\wedge\neg S)$ 都是 A 的子公式，而 $P\wedge Q\rightarrow$, $R\wedge$ 不是 A 的子公式.

2. 替换规则

定理 1.3.2 设 C 是 A 的一个子公式，$C\Leftrightarrow D$，将 A 中的子公式 C 置换成 D 后，得到公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$，这就是替换规则.

证明 因为 $C\Leftrightarrow D$，即对它们的命题变元，做任何真值赋值，C 与 D 的真值相同，因此 D 代替 C 后，公式 B 与 A 在对其命题变元做相应的任何真值赋值，它们的真值仍相同，所以 $A\Leftrightarrow B$.

由定理 1.3.2，我们可以对公式 A 中几个子公式同时进行等值替换，所得公式与原公式等值.

例 1.3.3 证明 $A\rightarrow(B\vee(B\wedge A))\Leftrightarrow A\rightarrow B$.

证明 由吸收律知，$B\vee(B\wedge A)\Leftrightarrow B$，由替换规则得 $A\rightarrow(B\vee(B\wedge A))\Leftrightarrow A\rightarrow B$.

例 1.3.4 证明 $(A\wedge B)\rightarrow C\Leftrightarrow A\rightarrow(B\rightarrow C)$.

证明

$$
\begin{aligned}
(A\wedge B)\rightarrow C &\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)\vee C && \text{(蕴含等值式)}\\
&\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B\vee C && \text{(德摩根律)}\\
&\Leftrightarrow\neg A\vee(B\rightarrow C) && \text{(蕴含等值式)}\\
&\Leftrightarrow A\rightarrow(B\rightarrow C). && \text{(蕴含等值式)}
\end{aligned}
$$

由上述定理及例题可知，代入与替换是有区别的. 首先代入针对重言式中的命题变元而言，替换针对一般的命题公式实行. 其次代入必须是处处代入，替换可部分替换，亦可全部

替换. 最后替换是等值替换，代入无此要求.

在实际生产生活中，许多问题都与逻辑有着密切的联系. 下面我们先介绍一个逻辑问题. 这是由逻辑学家斯穆里安(Smullyan)提出的.

例 1.3.5　一个岛上居住着两类人——骑士和流氓(Knights and Knaves). 骑士说的都是实话，而流氓只会说谎. 你碰到两个人 A 和 B，如果 A 说"B 是骑士"，B 说"我们两个不是一类人". 请判断 A 和 B 两人到底是流氓还是骑士.

解　首先符号化命题. 设 P：A 是骑士，Q：B 是骑士，则有 $\neg P$ 和 $\neg Q$ 表示 A 是流氓和 B 是流氓.

我们首先考虑 A 是骑士的情形，这就是说 P 是真的. 如果 A 是骑士，那他说"B 是骑士"就是真话，因此 Q 为真，A 和 B 就是一类人. 然而，如果 B 是骑士，那么 B 说的话应该为真，然而却并非如此，因为 A 和 B 都是骑士. 因此，我们可以得出 A 不是骑士，也就是 P 为假.

如果 A 是流氓，则根据题目可知 A 所说的"B 是骑士"就不是真话，这意味着 Q 为假且 B 也是流氓. 而且，如果 B 是流氓，那么 B 说的话也是假的，这与 A 和 B 都是流氓是一致的.

所以，我们得出结论 A 和 B 都是流氓.

例 1.3.6　用等值演算法判断下列公式的类型：

(1) $(P\to Q)\land P\to Q$;

(2) $\neg(P\to(P\lor Q))\land R$;

(3) $P\land(((P\lor Q)\land\neg P)\to Q)$.

解　(1)
$$
\begin{aligned}
(P\to Q)\land P\to Q &\Leftrightarrow(\neg P\lor Q)\land P\to Q\\
&\Leftrightarrow\neg((\neg P\lor Q)\land P)\lor Q\\
&\Leftrightarrow(\neg(\neg P\lor Q)\lor\neg P)\lor Q\\
&\Leftrightarrow((P\land\neg Q)\lor\neg P)\lor Q\\
&\Leftrightarrow((P\lor\neg P)\land(\neg Q\lor\neg P))\lor Q\\
&\Leftrightarrow(1\land(\neg Q\lor\neg P))\lor Q\\
&\Leftrightarrow(\neg Q\lor\neg P)\lor Q\\
&\Leftrightarrow(\neg Q\lor Q)\lor\neg P\\
&\Leftrightarrow 1\lor\neg P\\
&\Leftrightarrow 1.
\end{aligned}
$$

最后结果说明(1)是重言式.

(2)
$$
\begin{aligned}
\neg(P\to(P\lor Q))\land R &\Leftrightarrow\neg(\neg P\lor P\lor Q)\land R\\
&\Leftrightarrow(P\land\neg P\land\neg Q)\land R\\
&\Leftrightarrow(0\land\neg Q)\land R\\
&\Leftrightarrow 0\land R\\
&\Leftrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

最后结果说明(2)是矛盾式.

(3)
$$
\begin{aligned}
P\land(((P\lor Q)\land\neg P)\to Q) &\Leftrightarrow P\land(((P\land\neg P)\lor(Q\land\neg P))\to Q)\\
&\Leftrightarrow P\land((0\lor(Q\land\neg P))\to Q)\\
&\Leftrightarrow P\land((Q\land\neg P)\to Q)
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow P \wedge (\neg(Q \wedge \neg P) \vee Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee P \vee Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge 1$$
$$\Leftrightarrow P.$$

最后结果说明(3)不是重言式,00,01 是成假赋值;也不是矛盾式,10,11 是成真赋值.

等值演算中各步得出的等值式所含命题变元可能不一样多,如例 1.3.6(3)中最后一步不含 q,此时将 q 看成它的哑元,考虑赋值时应将哑元也算在内,因而赋值的长度为 2.这样,可将(3)中各步的公式都看成含命题变元 p,q 的公式,在写真值表时已经讨论过类似的问题.

但随着问题难度的加深,对于较复杂的问题,单纯依据上述符号加自然语言推理的方法来解决逻辑问题是不可行的. 所以我们要在逻辑系统内借助等值演算来解决一些逻辑问题.

例 1.3.7 在某次研讨会的休息时间,3 名与会者根据王教授的口音分别作出下述判断:

甲说:王教授不是苏州人,是上海人.

乙说:王教授不是上海人,是苏州人.

丙说:王教授既不是上海人,也不是杭州人.

王教授听后,笑曰:你们三个人中有一个全说对了,有一人全说错了,还有一个人对错各一半. 试用等值演算判断王教授是哪里人?

解 首先符号化命题. 设 P:王教授是苏州人;Q:王教授是上海人;R:王教授是杭州人. 则有

$$甲:\neg P \wedge Q,\quad 乙:\neg Q \wedge P,\quad 丙:\neg Q \wedge \neg R.$$

王教授只可能是其中一个城市的人或者三城市都不是. 所以,丙至少说对了一半. 因此,可得甲或乙必有一个人全错了. 又因为,若甲全错了,则有$\neg Q \wedge P$,因此,乙全对. 同理,乙全错则甲全对. 所以丙是一对一错. 故王教授的话可符号化为

$$((\neg P \wedge Q) \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))) \vee ((\neg Q \wedge P) \wedge (\neg Q \wedge R))$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge R)$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge R)$$
$$\Leftrightarrow 1.$$

因为王教授不可能既是苏州人又是杭州人,故$\neg Q \wedge P \wedge R \Leftrightarrow 0$,$\neg P \wedge Q \wedge \neg R \Leftrightarrow 1$.

因此,王教授是上海人.

1.4 范　　式

本节给出命题公式的两种规范表示方法,这种规范的表达式能表达真值表所能提供的一切信息.

1.4.1 合取范式与析取范式

定义 1.4.1 命题变元及其否定统称**文字**,仅由有限个文字构成的析取式称作**简单析取式**,仅由有限个文字构成的合取式称作**简单合取式**.

$P,P\wedge Q,\neg P\wedge Q\wedge\neg Q$ 为分别由 1 个文字，2 个文字，3 个文字构成的简单合取式.

注 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式.

定理 1.4.1 (1) 简单析取式为重言式的充要条件是，它同时包含某个命题变元及其否定；

(2) 简单合取式为矛盾式的充要条件是，它同时包含某个命题变元及其否定.

证明 下面只证(1)成立，结论(2)读者自证.

充分性. 对任意命题变元 P，$P\vee\neg P$ 为重言式，因此若有 P 和 $\neg P$ 在简单析取式中出现，经过交换律，必有 $P\vee\neg P$ 在简单析取式中出现，则简单析取式为重言式.

必要性. 假设一个简单析取式为重言式，但式中不同时含任一命题变元及其否定，此时，我们对该析取式中出现在$\neg$后的变元赋值 1，而对不出现在$\neg$后的变元赋值 0，则整个析取式取值为 0，这与假设矛盾.

定义 1.4.2 (1) 由有限个简单合取式构成的析取式，称为**析取范式**，形式为

$$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_m(m\geqslant 1),$$

其中 A_i 为简单合取式；

(2) 由有限个简单析取式构成的合取式，称为**合取范式**，形式为

$$B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_m(m\geqslant 1),$$

其中 B_i 为简单析取式；

(3) 析取范式与合取范式统称**范式**.

注 (1) 析取范式与合取范式仅含联结词$\neg,\wedge,\vee$.

(2) 单个文字、简单析取式和简单合取式既是析取范式又是合取范式.

例 1.4.1 (1) $\neg P,Q$ 是析取范式又是合取范式.

(2) $\neg P\wedge Q\wedge R$ 既是一个简单合取式构成的析取范式，又是由三个简单析取式构成的合取范式.

(3) $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$，$(P\wedge R)\vee(Q\wedge\neg R\wedge P)\vee(\neg R\wedge\neg P)$是析取范式.

(4) $(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$，$(P\vee R)\wedge(Q\vee\neg R\vee P)\wedge(\neg R\vee\neg P)$是合取范式.

定理 1.4.2(范式存在定理) 任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

证明 给出求范式的构造性算法.

(1) 消除公式中的运算符$\rightarrow$和$\leftrightarrow$.

可用等值式将 $P\rightarrow Q$ 置换为$\neg P\vee Q$；$P\leftrightarrow Q$ 置换为$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$，或$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$（析取范式），或$(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee Q)$(合取范式).

(2) 将$\neg$向内深入到变元前面，用 P 置换$\neg\neg P$，将$\neg(P\wedge Q)$置换为$\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q)$置换为$\neg P\wedge\neg Q$.

(3) 使用分配律将公式变为所需的范式.

$$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R);\qquad(\text{析取范式})$$

$$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R).\qquad(\text{合取范式})$$

例 1.4.2 求$((P\vee Q)\rightarrow R)\rightarrow P$ 的析取范式和合取范式.

解

$$\begin{aligned}((P\vee Q)\rightarrow R)\rightarrow P&\Leftrightarrow\neg(\neg(P\vee Q)\vee R)\vee P\\&\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P\\&\Leftrightarrow(P\vee Q\vee P)\wedge(\neg R\vee P)\qquad(\text{合取范式})\\&\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)\qquad(\text{合取范式})\\&\Leftrightarrow(P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P\qquad(\text{析取范式})\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg R)$. （析取范式）

由上例看出，一个公式的析取范式或合取范式不是唯一的，但它们是等值的. 利用合取范式和析取范式可以判别命题公式中的重言式和矛盾式.

定理 1.4.3 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式；

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

证明留作练习，读者自行证明.

例 1.4.3 判断 $\neg(P \vee R) \vee \neg(Q \wedge \neg R) \vee P$ 是否为重言式或矛盾式.

解 $\neg(P \vee R) \vee \neg(Q \wedge \neg R) \vee P \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee \neg Q \vee R \vee P$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R \vee P) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee R \vee P)$.（合取范式）

由于上例中的析取范式共有 4 个合取式，但每个简单合取式都不是矛盾式，故公式不是矛盾式，但无法判定是否是重言式，所以继续求出合取范式. 合取范式的两个简单析取式都各有一个变元及其否定同时出现，所以每个简单析取式都是重言式，故公式是重言式.

1.4.2 主范式

虽然可以利用范式来判断公式的类型，但是由于范式的形式并不唯一，此种方法有时不是很有效. 为了进一步研究命题公式，下面引入**主范式**的概念.

定义 1.4.3 在含有 n 个命题变元的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变元和它的否定不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次，且第 i 个命题变元或它的否定式出现在从左算起的第 i 位上(若命题变元无角标，按字典顺序排列)，称这样的简单合取式(简单析取式)为**极小项**(**极大项**).

由定义知极小项、极大项有以下性质：

(1) n 个命题变元可构成 2^n 个极小项(极大项).

(2) 每个极小项仅有一个成真赋值，其余 2^n-1 个赋值均为成假赋值；每个极大项仅有一个成假赋值，其余 2^n-1 个赋值均为成真赋值.

(3) 若极小项的成真赋值对应的 n 位二进制数转化为十进制数为 i，记对应的极小项为 m_i，$i \neq j$ 时，$m_i \wedge m_j \Leftrightarrow 0$.

(4) 若极大项的成假赋值对应的 n 位二进制数转化为十进制数为 i，记对应的极大项为 M_i，$i \neq j$ 时，$M_i \vee M_j \Leftrightarrow 1$.

(5) 全体极小项的析取恒为 1，全体极大项的合取恒为 0，即 $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i \Leftrightarrow 1$，$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i \Leftrightarrow 0$.

以上性质在表 1.4.1 上看得很清楚.

表 1.4.1

极小项				极大项			
公式	成真赋值		名称	公式	成假赋值		名称
	P	Q			P	Q	
$\neg P \wedge \neg Q$	0	0	m_0	$P \vee Q$	0	0	M_0
$\neg P \wedge Q$	0	1	m_1	$P \vee \neg Q$	0	1	M_1
$P \wedge \neg Q$	1	0	m_2	$\neg P \vee Q$	1	0	M_2
$P \wedge Q$	1	1	m_3	$\neg P \vee \neg Q$	1	1	M_3

表 1.4.1 为两个变元 P,Q 形成的极小项、极大项.

读者也可以根据定义绘制出含三个或 n 个命题变元的极小项、极大项的表.

定义 1.4.4　(1) 若命题公式是由若干不同的极小项构成的析取范式,则称为**主析取范式**;

(2) 若命题公式是由若干不同的极大项构成的合取范式,则称为**主合取范式**;

(3) 主析取范式与主合取范式统称为**主范式**.

规定主范式均按极小项或极大项的下标从小到大的顺序排列. 规定矛盾式的主析取范式为 0,重言式的主合取范式为 1.

定理 1.4.4(主范式存在与唯一性定理)　任何含有 n 个命题变元的命题公式 A 都存在与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是唯一的.

证明　这里只证主析取范式的存在性和唯一性.

若命题公式 A 是矛盾式,则它的主析取范式为 0. 以下设 A 不是矛盾式.

由定理 1.4.2,A 存在与之等值的析取范式 A',先求出 A',然后继续下面的构造算法.

(1) 展开:若 A'的某个简单合取式 A_i 中不含命题变元 p_j,也不含$\neg p_j$,将 A_i 展开如下:

$$A_i \Leftrightarrow A_i \wedge 1 \Leftrightarrow A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j).$$

继续这个过程直到所有的简单合取式都含 n 个命题变元或它的否定.

(2) 消去:将重复出现的命题变元以及极小项和矛盾式都消去,如用 p_i 代替 $p_i \wedge p_i$,m_i 代替 $m_i \vee m_i$,0 代替矛盾式等.

(3) 排序:将极小项按下标从小到大的顺序排列.

唯一性　假若 A 存在两个与之等值的主析取范式 B 与 C,则 $B \Leftrightarrow C$. 由于 B 与 C 是不同的主析取范式,不妨设极小项 m_i 只出现在 B 中而不出现在 C 中,于是角标 i 的二进制表示为 B 的成真赋值,而为 C 的成假赋值,这与 $B \Leftrightarrow C$ 矛盾,因而 B 与 C 必相同.

定理 1.4.5　设 m_i 与 M_i 是命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 形成的极小项和极大项,则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i.$$

证明　由极小项与极大项的定义可知,极小项的成真赋值恰为同下标的极大项的成假赋值,反之亦然,于是有定理的结论.

定理 1.4.6　设公式 A 的主析取范式为 $A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s}$ 的充要条件是,A 的主合取范式为 $A \Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-s}}$,其中 令 $\overline{A}_x=\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}$,$\overline{A}_H=\{j_1,j_2,\cdots,j_{2^n-s}\}$,下标集之间有关系 $\overline{A}_x \cup \overline{A}_H=\{0,1,2,\cdots,2^n-1\}$ 且 $\overline{A}_x \cap \overline{A}_H=\varnothing$.

证明　由极小项与极大项的定义,公式 A 的主析取范式中每个极小项对应 A 的一个成真赋值,设公式 A 有 s 个成真赋值,则 A 的主析取范式有 s 个极小项,在 2^n 个赋值中 A 的成假赋值有 2^n-s 个,成真赋值与成假赋值对应的十进位数分别是极小项与极大项的下标,因此有公式成立.

例 1.4.4　求命题公式 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式与主合取范式,指出它的成真赋值和成假赋值.

解　本公式是含二个变元的公式.

(1) $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$　　　(成假赋值 10 对应 2)

$\Leftrightarrow M_2.$　　　(主合取范式)

(2) 由主析取与主合取的关系得 A 的主析取范式

$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$ （主析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$.

公式 $P \to Q$ 的成真赋值为 00,01,11,成假赋值为 10.

在求主析取范式与主合取范式时,哪个易求先求哪个,然后再利用定理 1.4.6 求另一种主范式.

例 1.4.5 求命题公式$(P \to Q) \leftrightarrow R$ 的主析取范式与主合取范式.

解 (1) 求主析取范式

$$(P \to Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R),$$

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Leftrightarrow m_4,$$

$$\neg P \wedge R \Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3,$$

$$Q \wedge R \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow m_3 \vee m_7,$$

$$(P \to Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7.$$

(2) 求主合取范式

$$(P \to Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R),$$

$$\neg P \vee Q \vee \neg R \Leftrightarrow M_5,$$

$$P \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2,$$

$$\neg Q \vee R \Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_6,$$

$$(P \to Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6.$$

例 1.4.6 判断$(P \vee Q) \to R$ 的类型.

解 $(P \vee Q) \to R \Leftrightarrow \neg (P \vee Q) \vee R$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg R \vee R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7.$$

该公式为可满足式.

判断公式的类型,公式是否等值,可以用真值表、等值演算、主范式三种方法.

真值表与主范式有一对一的对应关系,通过真值表立即可写出公式的主范式. 同样通过主范式,立即可给出公式的真值表.

总结以上讨论有:

(1) 重言式的主析取范式包含所有(2^n 个)极小项,它的主合取范式为 1.

(2) 矛盾式的主合取范式包含所有(2^n 个)极大项，它的主析取范式为 0.

(3) 命题公式的主析取范式中极小项的个数大于 0，或主合取范式中极大项的个数小于 2^n，则公式为可满足式.

(4) n 个命题变元的命题公式 A 的主析取范式中极小项的个数与主合取范式中极大项的个数之和为 2^n，且极小项的下标集与极大项的下标集之并为$\{0,1,2,\cdots,2^n-1\}$，交集为空集.

(5) 等值的命题公式有相同的主析取范式和主合取范式.

(6) n 个变元的主析取范式(主合取范式)共有 2^{2^n} 种，有无穷多个等值公式对应同一个主析取范式(主合取范式).

1.5　联结词完备集

定义 1.5.1　称 $F:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$为 n 元**真值函数**.

定义 1.5.2　(1) **与非联结词**，记号$\uparrow$，读作 P 与 Q 的否定，记作 $P\uparrow Q$，$P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$；

(2) **或非联结词**，记号$\downarrow$，读作 P 或 Q 的否定，记作 $P\downarrow Q$，$P\downarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$.

n 个命题变元可构成 2^{2^n} 个不同的真值函数，含一个命题变元 P 的一元真值函数共有 4 个，见表 1.5.1，含两个命题变元 P,Q 的二元真值函数共有 16 个，见表 1.5.2.

表 1.5.1　一元真值函数表

P	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

表 1.5.2　二元真值函数表

P	Q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

表 1.5.2 给出 16 个二元联结词：

(1) $F_0^{(2)}$ 表示矛盾式 0；$F_{15}^{(2)}$表示重言式 1.

(2) $F_1^{(2)}$ 表示 $P\wedge Q$；$F_7^{(2)}$ 表示 $P\vee Q$.

(3) $F_{11}^{(2)}$表示 $Q\rightarrow P$；$F_{13}^{(2)}$表示 $P\rightarrow Q$.

(4) $F_{12}^{(2)}$表示$\neg P$；$F_{10}^{(2)}$表示$\neg Q$.

(5) $F_9^{(2)}$ 表示 $P\leftrightarrow Q$.

(6) $F_3^{(2)}$ 表示 P；$F_5^{(2)}$ 表示 Q.

(7) $F_2^{(2)}$ 表示$\neg(P\rightarrow Q)$；$F_4^{(2)}$ 表示$\neg(Q\rightarrow P)$.

(8) $F_6^{(2)}$ 表示 $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$.

(9) $F_8^{(2)}$ 表示 $P\downarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$,或非联结词.

(10) $F_{14}^{(2)}$ 表示 $P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$,与非联结词.

通过真值函数可以看出,每个真值函数可以找到许多与之等值的命题公式,如 $F_0^{(2)}$ 是二元矛盾式的代表,所有二元矛盾式均与之等值.每个真值函数与唯一的主析取范式(主合取范式)等值,即每个真值函数有无穷多个与之等值的命题公式.

关于联结词,前面已学习过了一个一元联结词(否定),四个二元联结词,根据二元真值函数表还可以定义二元联结词,它们都可以用现有的五个联结词来表示,实际上还可以用五个联结词的一部分来表示所有的二元联结词.

随着命题演算在电子线路及程序设计语言中的大量使用,近来又出现了几个常用的二元联结词,当然也包含在 16 个二元联结词之内.

定义 1.5.3 在联结词集合中,若一个联结词可以由集合中其他联结词来定义,则该联结词称为**冗余**联结词,否则称为**独立**联结词.

定义 1.5.4 S 为联结词集合,若满足:

(1) 任何命题公式都可以仅使用 S 中的联结词表示,称 S 为**联结词完备集**;

(2) 若 S 中不含任何冗余联结词,且满足(1),称 S 为**最小联结词完备集**.

定理 1.5.1 $S=\{\neg,\wedge,\vee\}$是联结词完备集.

证明 因为任何命题公式都与一个主析取范式等值,主析取范式中仅含$\neg,\wedge,\vee$,所以 S 是联结词完备集.

推论 以下联结词集都是联结词完备集.

(1) $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$;

(2) $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$;

(3) $\{\neg,\wedge\}$;

(4) $\{\neg,\vee\}$;

(5) $\{\neg,\rightarrow\}$.

证明留作练习,读者自证.

可以证明,恒取 0 的真值函数,即命题公式的矛盾式,不能用仅含联结词$\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$的公式表示,因而集合$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集,由此可知它的任何子集也不是联结词完备集.

设 S_1,S_2 是两个不同的联结词完备集,用 S_1 中的联结词构成的任何公式都可以等值转化为用 S_2 中的联结词构成的公式,反之亦然,于是可以构造只含某个确定联结词完备集中的联结词的公式集族形式.如将公式转化为主析取范式,则所用联结词完备集为$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$.事实上,$\{\neg,\wedge\}$,$\{\neg,\vee\}$,$\{\neg,\rightarrow\}$都是最小联结词完备集.

定理 1.5.2 联结词集$\{\downarrow\}$,$\{\uparrow\}$都是联结词完备集.

证明 由于$\{\neg,\wedge,\vee\}$完备,只需要证其中的每个联结词均可由$\uparrow$表示即可.

$$\neg P\Leftrightarrow\neg(P\wedge P)\Leftrightarrow P\uparrow P,$$

$$(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg(P\uparrow Q)\Leftrightarrow(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q),$$

$$(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge\neg Q)\Leftrightarrow\neg P\uparrow\neg Q\Leftrightarrow(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q).$$

所以$\{\uparrow\}$是联结词完备集.类似可证$\{\downarrow\}$也是联结词完备集.

联结词集$\{\downarrow\}$,$\{\uparrow\}$在大规模集成电路中有重要的应用.

1.6 命题演算的推理理论

推理是从前提出发依据推理规则得出结论的思维过程.推理分为演绎推理和归纳推理两类.凡前提和结论的联系是必然的,此类推理为演绎推理,否则称为归纳推理.数理逻辑主要研究演绎推理.推理对于计算机科学的程序验证、定理的机械化证明和人工智能都是十分重要的.

定义 1.6.1 推理的**前提**是已知命题公式的集合,**结论**是推出的一个公式,推理形式表示为

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \quad B.$$

其中前提$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是命题公式的集合,公式 B 是结论,符号 表示推出.

定义 1.6.2 对推理形式$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \quad B$,若对 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B$ 的任意一个赋值,或 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为假,或当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为真时,B 也为真,则称推理是**有效的**或**正确的**,并称 B 是**有效结论**,此时记为 $\Gamma \quad B$,否则称推理是**无效的**,记作 $\Gamma \quad B$,其中 $\Gamma=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.

说明:(1) 前提是有限公式的集合,前提中的公式无次序关系.

(2) 对任意一组赋值,前提和结论的取值情况有 4 种:

前提 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$	结论 B
0	0
0	1
1	0
1	1

除前提真、结论假的情况外,其余三种赋值都使推理是有效的或正确的.

(3) 由以上叙述可知,推理正确不保证结论是真的.

定理 1.6.1 推理$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \vdash B$ 是有效的当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 为重言式.

证明 必要性.设$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \vdash B$ 是有效的,由定义知,对命题变元的任意一组赋值,不会出现 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为真、B 为假的情况,因而 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 为重言式.

充分性.若 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 为重言式,则对任何赋值,此蕴含式为真,因而不会出现前件真、后件假的情况,因此推理也是有效的.

推理正确时,可将$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \quad B$ 记为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B \tag{1.6.1}$$

推理的形式结构可以记为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow B \tag{1.6.2}$$

也记为

前提:$A_1, A_2, \cdots, A_n$;

结论:B. (1.6.3)

论证推理是否正确就是判断(1.6.2)式是否为重言式. 判断的方法有三种：真值表法、等值演算法、主析取(合取)范式法.

例 1.6.1 判断下列各个推理是否正确.

(1) 前提：$(P\wedge\neg P)\to\neg R, P\wedge\neg P$；结论：$\neg R$.

(2) 前提：$P\vee R\vee Q, \neg Q$；结论：$P\vee R$.

(3) 前提：$P, Q\to P$；结论：Q.

证明 (1) $(((P\wedge\neg P)\to\neg R)\wedge(P\wedge\neg P))\to\neg R\Leftrightarrow 0\to\neg R$

$$\Leftrightarrow 1.$$

故推理(1)正确.

(2) $((P\vee R)\vee Q\wedge\neg Q)\to(P\vee R)\Leftrightarrow(((P\vee R)\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q))\to(P\vee R)$

$$\Leftrightarrow((P\vee R)\wedge\neg Q)\to(P\vee R)$$

$$\Leftrightarrow 1.$$

故推理(2)正确.

(3) $(P\wedge(Q\to P))\to Q\Leftrightarrow(P\wedge(\neg Q\vee P))\to Q$

$$\Leftrightarrow\neg(P\wedge(\neg Q\vee P))\vee Q$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg(\neg Q\vee P)\vee Q$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge\neg P)\vee Q$$

$$\Leftrightarrow\neg P\vee Q.$$

当 P 为 1,Q 为 0 时,蕴含式为 0,所以推理(3)不正确.

例 1.6.2 判断下列各个推理是否正确.

(1) 今天乔燕或去看电影或去游泳,她没去看电影. 所以,她去游泳了.

(2) 若下午气温超过 30℃,则石晶必去游泳. 若她去游泳,她就不去看电影了. 所以,若石晶没去看电影,下午气温必超过了 30℃.

解 (1) 设 P：乔燕去看电影. Q：乔燕去游泳.

前提：$P\vee Q, \neg P$；

结论：Q.

推理的形式结构：$((P\vee Q)\wedge\neg P)\to Q$.

用等值演算法去判断上式是否为重言式.

$$((P\vee Q)\wedge\neg P)\to Q\Leftrightarrow((P\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P))\to Q$$

$$\Leftrightarrow(Q\wedge\neg P)\to Q$$

$$\Leftrightarrow\neg(Q\wedge\neg P)\vee Q$$

$$\Leftrightarrow\neg Q\vee P\vee Q$$

$$\Leftrightarrow 1.$$

故推理(1)正确.

(2) 设 P：下午气温超过 30℃. Q：石晶去游泳. R：石晶去看电影.

前提：$P\to Q, Q\to\neg R$；

结论：$\neg R\to P$.

推理的形式结构：$((P\to Q)\wedge(Q\to\neg R))\to(\neg R\to P)$.

用主合取范式法判断上式是否为重言式.

$$((P\to Q)\wedge(Q\to\neg R))\to(\neg R\to P)\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee\neg R))\vee(R\vee P)$$
$$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R))\vee(R\vee P)$$
$$\Leftrightarrow P\vee R.$$

不是重言式，所以推理(2)不正确.

1.7 自然推理系统 N 中的形式证明

判断推理是否有效有三种方法：真值表、等值演算法和主析取(合取)范式法. 当推理中包含的命题变元较多时，上述方法演算量过大，因此对由前提推出结论的正确推理应寻求简洁严谨的证明. 证明必须在形式系统中进行，形式系统有两部分，一部分是表述命题公式的形式语言，一部分是由形式语言表述的公理和推理规则.

定义 1.7.1 一个描述推理过程的命题公式序列，其中每个公式或者是已知命题公式，或者是某些前提推出的结论，序列中最后一个命题公式就是推理的有效结论，称这个**公式序列为形式证明.**

定义 1.7.2 一个形式系统 I 可由 4 部分组成：

(1) 非空字母表集，记作 $A(I)$；

(2) $A(I)$中的符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$；

(3) $E(I)$中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_x(I)$；

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

可将 I 记为四元组$\langle A(I),E(I),A_x(I),R(I)\rangle$，其中$\langle A(I),E(I)\rangle$是形式语言系统而$\langle A_x(I),R(I)\rangle$为 I 的形式演算系统.

形式系统一般分为两类，一类是**自然推理系统**，它是从任意给定的前提出发，应用系统的推理规则进行推理演算，得到的最后的命题公式是推理结论. 另一类是**公理推理系统**，它只能从若干给定的公理出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的结论是系统中的重言式，称为系统中的定理.

现在介绍自然推理系统 N，它的定义中无公理集部分.

定义 1.7.3 自然推理系统 N 的定义如下：

1. 字母表

(1) 命题变元符号：$P,Q,R,\cdots,P_i,Q_i,R_i,\cdots$

(2) 联结词符号：$\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$.

(3) 括号与逗号："(","）","，".

2. 合式公式

同定义 1.2.1.

3. 推理规则

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤上，都可以引入前提.

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤上，所得到的结论都可以作为后继证明的前提或最终结论.

(3) 置换规则：在证明的任何步骤上，命题公式的子公式都可以用与之等值的公式置

换，得到公式序列中又一公式.

(4) 代入规则：在证明的任何步骤上，重言式的任何命题变元都可以用命题公式代入，得到的仍是重言式.

由蕴含关系可得**推理定律**.

(5) 假言推理规则(或称**分离规则**)，用图式表示为

$$\frac{A\to B \quad A}{\therefore B}$$

(6) 附加规则　(7) 化简规则　(8) 拒取式　(9) 假言三段论　(10) 析取三段论

$$\frac{A}{\therefore A\lor B}\qquad \frac{A\land B}{\therefore A}\qquad \frac{A\to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}\qquad \frac{A\to B \quad B\to C}{\therefore A\to C}\qquad \frac{A\lor B \quad \neg B}{\therefore A}$$

(11) 构造性二难推理　(12) 破坏性二难推理　(13) 合取引入规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad A\lor C}{\therefore B\lor D}\qquad \frac{A\to B \quad C\to D \quad \neg B\lor \neg D}{\therefore \neg A\lor \neg C}\qquad \frac{A \quad B}{\therefore A\land B}$$

推理定律是由蕴含重言式得到的，从每个等价关系式可以得出两个推理定律，牢记这些定律，会给构造形式证明带来很多方便. 下面介绍 3 种基本的证明方法.

1. 直接证法

例 1.7.1　构造下面推理的证明.

(1) 前提：$P\lor Q, Q\to R, P\to S, \neg S$；

结论：$R\land(P\lor Q)$.

(2) 前提：$\neg P\lor Q, R\lor\neg Q, R\to S$；

结论：$P\to S$.

证明　(1) ① $P\to S$　　前提引入

② $\neg S$　　前提引入

③ $\neg P$　　①、②拒取式

④ $P\lor Q$　　前提引入

⑤ Q　　③、④析取三段论

⑥ $Q\to R$　　前提引入

⑦ R　　⑤、⑥假言推理

⑧ $R\land(P\lor Q)$　　⑦、④合取

证明长度为 8，最后为推理的结论，所以推理(1) 正确，$R\land(P\lor Q)$为有效结论.

(2) ① $\neg P\lor Q$　　前提引入

② $P\to Q$　　①置换

③ $R\lor\neg Q$　　前提引入

④ $Q\to R$　　③置换

⑤ $P\to R$　　②、④假言三段论

⑥ $R\to S$　　前提引入

⑦ $P \to S$ ⑤、⑥假言三段论

由最后一步知推理(2)正确，$P \to S$ 是有效结论.

2. 附加前提法

定理 1.7.1(附加前提) 若 $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \land B \Rightarrow C$，则 $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \Rightarrow B \to C$.

证明
$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n) \to (B \to C) \Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n) \lor (\neg B \lor C)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \land B) \lor C$$
$$\Leftrightarrow A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \land B \to C.$$

因此若前式为重言式，后式也为重言式，结论正确.

注 表示当结论是蕴含式时，可将蕴含前件作为附加前提，蕴含后件作为结论去证明，此法称为附加前提法.

例 1.7.2 前提：$\neg P \lor \neg Q, \neg P \to R, R \to \neg S$；

结论：$S \to \neg Q$.

证明 ① S 附加前提

② $R \to \neg S$ 前提引入

③ $\neg R$ ①、②拒取式

④ $\neg P \to R$ 前提引入

⑤ P ③、④拒取式

⑥ $\neg P \lor \neg Q$ 前提引入

⑦ $\neg Q$ ⑤、⑥析取三段论

⑧ $S \to \neg Q$ ①、⑦附加前提回归

故结论是有效的.

3. 归谬法(反证法)

反证法 是把结论的否定作为附加前提，与给定的前提一起推证，若能引出矛盾，说明结论是有效的.

定义 1.7.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为命题公式，如果对任意的公式 R，有
$$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \Rightarrow R \land \neg R,$$
则称公式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是**不相容的**；否则称为**相容的**.

定理 1.7.2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, C$ 是公式，且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相容的，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \neg C$ 是不相容的，则 C 是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的有效结论.

证明 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \neg C$ 不相容，说明 $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \land \neg C$ 为矛盾式. 而
$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n) \to C \Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n) \lor C$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \land \neg C).$$

$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \land \neg C$ 为矛盾式，因此 $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n \to C$ 为重言式，即
$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n) \Rightarrow C,$$

故推论正确.

例 1.7.3 构造推理的证明.

前提：$\neg P \land \neg Q$；

结论：$\neg(P \land Q)$.

证明 ① $\neg\neg(P\wedge Q)$ 结论否定引入
② $P\wedge Q$ ①置换
③ P ②化简
④ $\neg P\wedge\neg Q$ 前提引入
⑤ $\neg P$ ④化简
⑥ $\neg P\wedge P$ ③、⑤合取引入
⑦ 0 矛盾

故结论是有效的.

例 1.7.4 如果 a 是奇数,则 a 不能被 2 整除;如果 a 是偶数,则 a 能被 2 整除. 因此如果 a 是偶数,则 a 不是奇数. 请使用多种方法研究推理正确与否.

解 设 P:a 是奇数,Q:a 是偶数,R:a 能被 2 整除.

前提:$P\rightarrow\neg R, Q\rightarrow R$;

结论:$Q\rightarrow\neg P$.

推理的形式结构:$((P\rightarrow\neg R)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(Q\rightarrow\neg P)$.

(1) 真值表法可解(略)

(2) 等值演算法

$$\begin{aligned}((P\rightarrow\neg R)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(Q\rightarrow\neg P)&\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee\neg R)\wedge(\neg Q\vee R))\vee(\neg Q\vee\neg P)\\&\Leftrightarrow(P\wedge R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee\neg Q\vee\neg P\\&\Leftrightarrow(P\wedge R)\vee\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee\neg Q\\&\Leftrightarrow(\neg P\vee R)\vee(\neg Q\vee\neg R)\\&\Leftrightarrow 1.\end{aligned}$$

(3) 主析取范式法

$$((P\rightarrow\neg R)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(Q\rightarrow\neg P)\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7.$$

所以原公式为重言式

(4) 构造证明

① $P\rightarrow\neg R$ 前提引入
② $R\rightarrow\neg P$ ①置换
③ $Q\rightarrow R$ 前提引入
④ $Q\rightarrow\neg P$ ③、②假言三段论

故结论是有效的.

(5) 附加前提法

前提:$P\rightarrow\neg R, Q\rightarrow R$;

结论:$Q\rightarrow\neg P$.

证明 ① Q 附加前提
② $Q\rightarrow R$ 前提引入
③ R ①、②分离规则
④ $P\rightarrow\neg R$ 前提引入
⑤ $\neg P$ ④、③拒取式
⑥ $Q\rightarrow\neg P$ 附加前提回归

故结论是有效的.

由例 1.7.4,同一问题可用不同的方法解决,但应注意分析问题的结构,用比较简洁的方法证明.

例 1.7.5　证明前提“今天下午没有出太阳并且今天比昨天冷”“只有今天下午出太阳,我们才去游泳”“若我们不去游泳,则我们将乘独木舟游览”以及“若我们乘独木舟游览 ,则我们将在黄昏时回家”导致结论“我们将在黄昏时回家”.

解　设 P:今天下午出太阳,Q:今天比昨天冷,R:我们将去游泳,S:我们将乘独木舟游览,T:我们将在黄昏时回家. 依题意有:

前提:$\neg P\wedge Q,R\to P,\neg R\to S,S\to T$;

结论:T.

证明
① $\neg P\wedge Q$　　前提引入
② $\neg P$　　①化简
③ $R\to P$　　前提引入
④ $\neg R$　　②、③拒取式
⑤ $\neg R\to S$　　前提引入
⑥ S　　④、⑤假言推理
⑦ $S\to T$　　前提引入
⑧ T　　⑥、⑦假言推理

例 1.7.6　证明前提“若你发给我电子邮件消息,则我将完成编写程序”“若你不发给我电子邮件消息,则我将早早地睡觉”以及“若我早早地去睡觉,则我将精力充沛地醒来”导致结论“若我不完成编写程序,则我将精力充沛地醒来”.

解　设 P:你发给我电子邮件消息,Q:我将完成编写程序,R:我将早早地睡觉,S:我将精力充沛地醒来,依题意有:

前提:$P\to Q,\neg P\to R,R\to S$;

结论:$\neg Q\to S$.

证明
① $\neg Q$　　附加前提
② $P\to Q$　　前提引入
③ $\neg P$　　①、②拒取
④ $\neg P\to R$　　前提引入
⑤ R　　③、④假言推理
⑥ $R\to S$　　前提引入
⑦ S　　⑤、⑥假言推理
⑧ $\neg Q\to S$　　附加前提回归

故结论是有效的.

例 1.7.7　符号化下述论述,并证明其有效性.

如果厂方拒绝增加工资,则罢工不会停止,除非罢工超过一年并且工厂厂长辞职. 厂方拒绝增加工资,并且罢工又不超过一年. 所以,罢工没有停止.

解　设 P:厂方增加工资,Q:罢工停止,R:罢工超过一年,S:工厂厂长辞职,依题意有:

前提：$\neg(R\wedge S)\to(\neg P\to\neg Q)$，$\neg P\wedge\neg R$；

结论：$\neg Q$.

证明	① Q	结论否定引入
	② $\neg P\wedge\neg R$	前提引入
	③ $\neg P$	②化简
	④ $\neg R$	②化简
	⑤ $\neg(R\wedge S)\to(\neg P\to\neg Q)$	前提引入
	⑥ $\neg R\vee\neg S$	④附加
	⑦ $\neg(R\wedge S)$	⑥置换
	⑧ $\neg P\to\neg Q$	⑤、⑦假言推理
	⑨ $\neg Q$	③、⑧假言推理
	⑩ $Q\wedge\neg Q$	①、⑨合取

自然形式推理系统仅是命题逻辑推理系统的一种形式，也是最基本的一种形式推理系统.

习 题 1

一、将下列命题符号化：

1. 小刘既不怕吃苦，又很钻研（令 P：小刘怕吃苦，Q：小刘很钻研）.

2. 只有不怕困难，才能战胜困难（令 P：不怕困难，Q：战胜困难）.

3. 整数 N 是偶数当且仅当 N 能被 2 整除（令 P：整数 N 是偶数，Q：整数 N 能被 2 整除）.

4. 仅当我有时间且天不下雨，我将去郊游（令 P：我有时间，Q：天下雨，R：我去郊游）.

5. 或者这个材料有趣，或者这些习题很难，并且两者恰具其一（令 P：这个材料有趣，Q：这些习题很难）.

二、选择

1. 下列语句中是命题的有（　　）.

A. 请随手关门！　　B. 你有事吗？

C. 2 或 3 是偶数.　　D. 我正在说谎话.

2. 下列语句中是命题的有（　　）.

A. 火星上有水.　　B. π 是无理数.

C. $X>Y$.　　D. 2050 年的元旦是阴天.

3. 下列语句中是原子命题的有（　　）.

A. 张扬和李桑是同学.　　B. 火车大约晚点二十分钟或三十分钟.

C. 小王和小张都是三好学生.　　D. 你只能选 202 或 301 房间.

4. P 和 Q 是命题变元，下列各式中，永真式是（　　）.

A. $P\to(P\vee Q)$　　B. $\neg(Q\to P)\wedge P$

C. $(P\to Q)\to P$　　D. $(P\wedge\neg P)\leftrightarrow Q$

5. 下面哪一组命题公式不是等值的？（　　）.

A. $\neg(P\rightarrow Q)$，$P\wedge\neg Q$　　B. $\neg(P\leftrightarrow Q)$，$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

C. $P\rightarrow(Q\vee R)$，$\neg P\wedge(Q\vee R)$　　D. $P\rightarrow(Q\vee R)$，$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$

6. 下面哪个公式是下重言式？(　　).

A. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$　　B. $(P\wedge Q)\rightarrow P$

C. $(\neg P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge\neg Q)$　　D. $\neg(P\vee Q)$

7. $P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow$(　　).

A. $\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$　　B. $(\neg P\vee Q)(\neg Q\vee P)$

C. $(\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee P)$　　D. $(\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)$

8. 下列不是联结词完备集的是(　　).

A. $S_1=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow\}$　　B. $S_2=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

C. $S_3=\{\neg,\wedge\}$　　D. $S_4=\{\rightarrow\}$

9. 下列是极小联结词完备集的是(　　).

A. $S_1=\{\neg,\wedge,\vee\}$　　B. $S_2=\{\rightarrow\}$

C. $S_3=\{\downarrow\}$　　D. $S_4=\{\neg,\uparrow\}$

三、分别给出下列公式的成真赋值和成假赋值：

1. $\neg(P\wedge Q\wedge\neg R)$.

2. $(\neg P\wedge Q)\rightarrow(P\leftrightarrow R)$.

3. $P\vee\neg Q$.

4. $\neg(P\vee Q)\rightarrow Q$.

四、填空

1. $(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q\Rightarrow$________(拒取式).

2. $(P\vee Q)\wedge\neg P\Rightarrow$________(析取三段论).

3. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow$________(假言三段论).

4. $(P\rightarrow Q)\wedge P\Rightarrow$________(假言推理).

5. $(P\wedge Q)\Rightarrow$________(化简律).

6. $P\Rightarrow$________(附加律).

五、列出下列公式的真值表，并判断下列公式的类型：

1. $(P\vee\neg R)\wedge(P\rightarrow Q)$.

2. $(P\wedge\neg Q)\wedge\neg P$.

3. $Q\rightarrow(P\vee Q)$.

六、简答

1. n 个命题变元的命题公式可以列出多少个不同的真值表.

2. 设 P,Q 均为真，R,S 均为假，求复合命题 $(P\leftrightarrow R)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow S)$ 的真值.

3. 已知命题公式 $A(P,Q,R)$(A 是关于命题变元 P,Q,R 的公式)为永假式，请给出公式的主合取范式.

4. 如命题公式 $B(P,Q)$(B 是关于命题变元 P,Q 的公式)为永真式，请给出公式的主析取范式.

5. 设 P,Q 为命题变元，请给出公式 $(\neg P\leftrightarrow Q)$ 的主析取范式.

6. 设公式 A 含有命题变元 P,Q,R，如 A 的主合取范式为 $M_0\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_5$，请给出

A 的主析取范式.

7. 已知公式 A 含有三个命题变元 P,Q,R，并且它的成真赋值为 000，001，110，请给出 A 的主析取范式和主合取范式.

七、用等值演算法证明下面的等值式：

1. $(P\to Q)\vee(P\to R)\Leftrightarrow P\to(Q\vee R)$.
2. $(Q\to P)\wedge(Q\leftrightarrow R)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge Q\wedge R$.

八、分别用等值演算法、真值表法用求下列命题公式的主析取范式和主合取范式：

1. $(P\to Q)\to R$.
2. $(Q\vee R)\to(P\leftrightarrow Q)$.
3. $\neg(\neg(P\to Q))\vee(\neg Q\to\neg P)$.
4. $P\to((Q\wedge R)\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R)))$.

九、某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习，选派必须满足以下条件：

(1) 若赵去，钱也去；

(2) 李周两人中必有一人去；

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人；

(4) 孙、李两人同去或同不去；

(5) 若周去，则赵、钱也同去.

试分析该公司如何选派他们出国.

十、判断下列推理是否正确，并证明之：

1. 如果王红学过英语和法语，则她学过日语，可她没学过日语，但学过法语，所以，她也学过英语.（设 P：王红学过英语，Q：王红学过法语，R：王红学过日语.）

2. 若小李是文科学生，则他爱看电影. 小李不是文科学生，所以他不爱看电影.（设 P：小李是文科学生，Q：小李爱看电影.）

十一、在自然推理系统中构造下面的推理证明：

1. 前提：$\neg(P\wedge Q),Q\to\neg R,R$；

结论：$\neg P$.

2. 前提：$P\to R,Q\to S,P,Q$；

结论：$R\wedge S$.

3. 前提：$\neg P\vee(Q\to R),S\to P,Q$；

结论：$\neg R\to\neg S$.

4. 前提：$\neg P\to Q,\neg P\vee R,Q\to S$；

结论：$\neg S\to R$.

十二、在自然推理系统 P 中，构造下面用自然语言给出的推理.

若小张喜欢数学，则小李或小赵也喜欢数学. 若小李喜欢数学，则小李也喜欢物理. 小张确实喜欢数学，可小李不喜欢物理，所以小赵喜欢数学.（P：小张喜欢数学，Q：小李喜欢数学，R：小赵喜欢数学，S：小李喜欢物理.）

第 2 章

一阶逻辑

在命题逻辑中，主要研究命题和命题演算，其基本组成单位是原子命题，并把它看作是不可再分解的. 但是，原子命题实际上还是可以作进一步分析的，特别是两个原子命题之间，常常有一些共性，为了刻画命题内部的逻辑结构，我们需要研究一阶逻辑. 此外，命题逻辑的推理中有着很大的局限性，一些简单的推理也不能用命题逻辑进行推证. 例如：

所有的人都是要死的；苏格拉底是人；所以苏格拉底是要死的.

这是著名的苏格拉底三段论，在命题中无法进行推理，因此我们有必要对命题的内部关系进行深入的研究.

2.1　一阶逻辑基本概念

简单命题是具有确切真值的陈述句，在一阶逻辑演算中，将进一步分解简单命题为个体词(主语)与谓词(谓语)两部分.

定义 2.1.1　研究对象中可以独立存在的事物称为**个体**. 个体可以是具体的也可以是抽象的，如桌子、实数、计算机、小李、中国等都是个体.

表示具体的、特指的个体词，称为**个体常元**，常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示；表示泛指的或在一定范围内变化的个体词，称为**个体变元**，常用小写字母 $x,y,z,\cdots$ 表示；个体变元的取值范围为**个体域**，常用 D 表示.

个体域可以是有限的或无限的. 由宇宙间的一切事物组成的个体，称为**全总个体域**. 若无特别声明，个体域均指全总个体域.

定义 2.1.2　用来刻画个体词的性质以及个体词之间相互关系的词，称为**谓词**. 谓词常用 $P,Q,R,\cdots$ 来表示. 表示具体确定意义的性质或关系的谓词，称为**谓词常项**；表示泛指的抽象的性质与关系的谓词，称为**谓词变项**. 谓词中包含个体变元的个数称为谓词的**元数**.

例 2.1.1　将下列命题符号化.

(1) 老虎是动物.

(2) 5 大于 3.

(3) 王平与李艳是同学.

(4) 武汉位于北京和广州之间.

(5) 若 x 小于 y 且 y 小于 z，则 x 小于 z.

解　(1) $F(x)$：x 是动物，x 是个体变元，a：老虎. 问题符号化为 $F(a)$.

(2) $G(x,y)$：x 大于 y，a：5，b：3. 问题符号化为 $G(a,b)$.

(3) $H(x,y)$：x 与 y 是同学，c：王平，d：李艳，问题符号化为 $H(c,d)$.

(4) $I(x,y,z)$：x 位于 y 和 z 之间，a：武汉，b：北京，c：广州. 问题符号化为 $I(a,b,c)$.

(5) $P(x,y)$：x 小于 y. 符号化为 $(P(x,y)\wedge P(y,z))\rightarrow P(x,z)$.

从数学角度看，谓词是以个体域为定义域，以 $\{0,1\}$ 为值域的函数.

有时将不带个体变元的谓词称为 0 元谓词. 如 $F(a)$，$G(a,b)$ 等都是 0 元谓词. 当 F，G 为谓词常项时，0 元谓词为命题，因此命题逻辑中的命题都可以表示成 0 元谓词，因而可将命题看成特殊的谓词.

分析出个体词和谓词后，仍不足以表达各种逻辑关系问题，关键是没有引入“所有的”“全体”“有的”“有些”这些全称量词和特称量词.

定义 2.1.3 (1) 表示数量的词为**量词**.

(2) 表示“所有”“任意”“一切”的词称为**全称量词**，记为“$\forall$”. $\forall x$ 表示对个体域中的所有个体，$\forall xA(x)$ 表示个体域中的所有个体具有性质 A.

(3) 表示“存在”“有些”，“至少存在一个”的词称为**存在量词**，记为“$\exists$”. $\exists x$ 表示存在个体域中的个体，而 $\exists xA(x)$ 表示存在着个体域中的个体具有性质 A.

量词是逻辑学家 Fray 引入的，有了量词以后，用逻辑符号表示命题的能力大大加强了.

例 2.1.2 个体域分别为(a)，(b)时，将下列命题符号化.

(1) 凡是人都吃饭.

(2) 有的人用左手写字.

其中：(a)个体域 D_1 为人类集合；

(b)个体域 D_2 为全总个体域.

解 (a) 令 $F(x)$：x 吃饭，$G(x)$：x 用左手写字.

(1) 在 D_1 中除人外，无别的东西，因此“凡人都吃饭”符号化为

$$\forall xF(x).$$

(2) “有的人用左手写字”符号化为

$$\exists xG(x).$$

(b) D_2 除有人外，还有万事万物，因而(1)，(2)符号化时必须先将人分离出来. 令 $M(x)$：x 是人，在 D_2 中(1)，(2)可分别重述如下：

(1) 对宇宙中一切事物而言，如果事物是人，则他要吃饭.

(2) 在宇宙中存在着用左手写字的人.

于是，(1) (2) 分别符号化为

$$\forall x(M(x)\rightarrow F(x)),\quad \exists x(M(x)\wedge G(x)).$$

其中，$F(x)$，$G(x)$ 与(a)中符号化相同.

注 这里引入了 $M(x)$，将人与其他事物区别开来，谓词 $M(x)$ 称为**特性谓词**，在命题符号化时要正确使用特性谓词.

在对问题(1)，(2)符号化的过程中，有人符号化为

(1) $\forall x(M(x)\wedge F(x))$，

(2) $\exists x(M(x)\rightarrow G(x))$.

这里要提醒初学者注意这个常见的错误. (1) 是不对的，若将它翻译成自然语言，应该是“宇宙间的所有个体都是人并且都吃饭”. (2) 也是不对的，应翻译为“在宇宙间存在个体，

如果这个体是人,则他用左手写字”.

注 使用全总个体域时,对个体变化的真正取值范围,用特性谓词加以限制. 对全称量词后的特性谓词,应作为蕴含式的前件;对存在量词后的特性谓词作为合取的一项.

在使用量词时还应注意以下几点:

(1) 在不同的个体域中,命题符号化的形式可能不一样.

(2) 若没有说明个体域,采用全总个体域.

(3) 在引入特性谓词后,使用全称量词与存在量词符号化的形式是不同的.

(4) 个体域和谓词的含义确定后,n 元谓词要转化为命题至少需要 n 个量词.

(5) 多个量词出现时,不能随意改变量词的顺序,这样会改变原命题的含义.

(6) 有些命题的符号化形式可以不仅一种.

例 2.1.3 将下列命题符号化.

(1) 所有的人都长着黑头发.

(2) 有的人登上过月球.

(3) 没有人登上过木星.

(4) 在美国留学的学生未必是亚洲人.

解 由于本题没有指明个体域,因而采用全总个体域. 令 $M(x)$:x 为人.

(1) 令 $F(x)$:x 长着黑头发. 命题符号化为 $\forall x\ (M(x)\rightarrow F(x))$.

(2) 令 $G(x)$:x 登上过月球. 命题符号化为 $\exists x\ (M(x)\land G(x))$.

(3) 令 $H(x)$:x 登上过木星. 命题符号化为 $\neg\exists x\ (M(x)\land H(x))$.

(4) 令 $F(x)$:x 是在美国留学的学生,$G(x)$:x 是亚洲人. 命题符号化为 $\neg\forall x\ (F(x)\rightarrow G(x))$.

例 2.1.4 将下列命题符号化.

(1) 所有狮子都是凶猛的.

(2) 有些狮子不喝咖啡.

(3) 有些凶猛的动物不喝咖啡.

解 设 $P(x)$: x 表示狮子,$Q(x)$: x 表示凶猛的,$R(x)$: x 表示喝咖啡,符号化为

(1) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

(2) $\exists x(P(x)\land\neg R(x))$.

(3) $\exists x(Q(x)\land\neg R(x))$.

例 2.1.5 将下列命题符号化.

(1) 有会说话的机器人.

(2) 每个实数都存在比它大的另外的实数.

(3) 尽管有人聪明,但未必一切人都聪明.

(4) 不存在跑得同样快的两只兔子.

解 采用全总个体域.

(1) $M(x)$: x 是机器人,$F(x)$: x 会说话,则符号化为

$$\exists x(M(x)\land F(x)).$$

(2) $R(x)$: x 是实数,$L(x,y)$: x 小于 y,则符号化为

$$\forall x(R(x)\rightarrow\exists y(R(y)\land L(x,y))).$$

(3) $M(x)$：x 是人，$G(x)$：x 聪明，则符号化为

$$\exists x(M(x)\land G(x)\land\neg(\forall x(M(x)\to G(x)))).$$

(4) $F(x)$：x 是兔子，$L(x,y)$：x 与 y 跑的同样快，则符号化为

$$\neg\exists x\exists y(F(x)\land F(y)\land L(x,y)) \quad 或 \quad \forall x\forall y(F(x)\land F(y)\to\neg L(x,y)).$$

例 2.1.6 将本章开始的命题符号化.

解 $F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 要死，a：苏格拉底，符号化为

$$\forall x(F(x)\to G(x))\land F(a)\to G(a).$$

2.2 一阶逻辑公式及解释

一阶语言是用于一阶逻辑的形式语言，本身不具备任何意义，可以根据需要解释成具体含义. 一阶语言的形式是多种多样的，这里给出便于将自然语言中的命题符号化的一阶语言.

定义 2.2.1 一阶语言 L 的字母表如下：

(1) 个体常元：$a,b,c,\cdots$

(2) 个体变元：$x,y,z,\cdots$

(3) 函数符号：$f,g,h,\cdots$

(4) 谓词符号：$F,G,H,\cdots$

(5) 量词符号：$\forall$，$\exists$

(6) 联结词符号：$\neg,\land,\lor,\to,\leftrightarrow$

(7) 括号和逗号："(" ")" ","

为叙述方便，下面给出项的概念.

定义 2.2.2 L 中项的定义如下：

(1) 个体常元和个体变元是项；

(2) 若 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是任意 n 元函数，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是任意 n 个项，则 $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是项；

(3) 所有项都是有限次使用(1)，(2)得到的.

定义 2.2.3 设 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 L 的任意 n 元谓词，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 L 的任意 n 个项，则称 $R(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是 L 的**原子公式**.

定义 2.2.4 L 的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式，则$\neg A$ 是合式公式.

(3) 若 A,B 是合式公式，则$(A\land B)$，$(A\lor B)$，$(A\to B)$，$(A\leftrightarrow B)$是合式公式.

(4) 若 A 是合式公式，则 $\forall xA(x)$，$\exists xA(x)$是合式公式.

(5) 有限次应用(1)～(4)构成的符号串是合式公式.

合式公式又称**谓词公式**，简称**公式**.

公式$(\neg A)$，$(A\land B)$等最外层的括号可以省去.

定义 2.2.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称 x 为**指导变元**，A 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，x 所有出现都称为**约束出现**，此时称 x 为**约束变元**，A 中不是约束出现的

其他变元称为**自由出现**,称这样的变元为**自由变元**.

例 2.2.1 指出下列公式中,各量词的辖域以及变元的自由出现和约束出现.

(1) $\forall x(F(x,y,z)\rightarrow \exists yG(x,y))$.

(2) $\exists xF(x,y)\wedge G(x,y)$.

(3) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$.

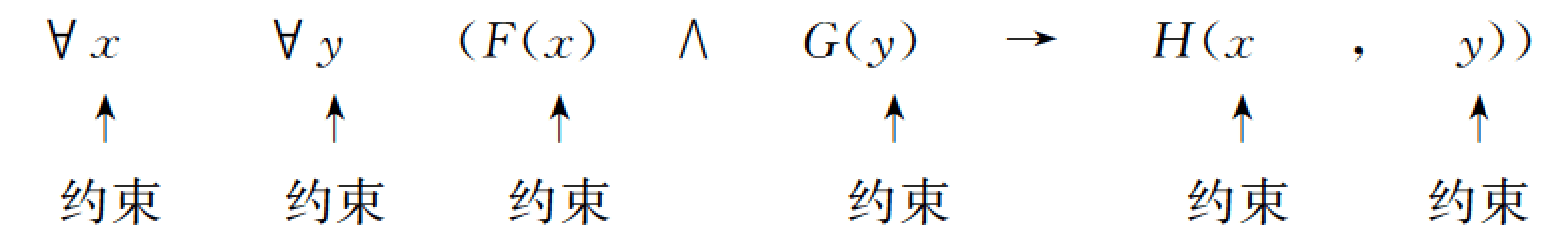
解 (1) 量词 $\forall x$ 的辖域为 $F(x,y,z)\rightarrow \exists yG(x,y)$,而量词 $\exists y$ 的辖域为 $G(x,y)$. 变元的自由出现和约束出现分别为



(2) 量词 $\exists x$ 的辖域为 $F(x,y)$. 变元的自由出现和约束出现分别为



(3) 量词 $\forall x$ 的辖域为 $\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$,量词 $\forall y$ 的辖域为 $(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$. 变元的自由出现和约束出现分别为



定义 2.2.6 设 A 为任意公式,若 A 中无自由出现的个体变元,则称 A 为封闭的合式公式,简称**闭式**.

由闭式的定义知,闭式中的所有个体变元均是约束出现.

对给定的合式公式,它是一个符号串,没有确定的意义,一旦将其中所有变元(变项)指定为常元(常项)代替后,公式就具有一定意义,有时就变成命题了. 这就是公式的解释.

定义 2.2.7 L 的解释 I 由 4 部分组成:

(1) 非空个体域 D_I;

(2) D_I 中一些特定的元素的集合 $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_i,\cdots\}$;

(3) D_I 上特定函数的集合 $\{\bar{f}_i^n\mid i,n\geqslant 1\}$;

(4) D_I 上特定谓词的集合 $\{\bar{F}_i^n\mid i,n\geqslant 1\}$.

关于 I 的几点说明:

(1) 个体变元 $x,y,\cdots$ 在 D_I 中取值.

(2) 个体常元 a_i 被解释成 $\bar{a}_i$.

(3) 函数符号 f_i^n 被解释成 $\bar{f}_i^n$, f_i^n 为第 i 个 n 元函数.

(4) F_i^n 被解释成 $\bar{F}_i^n$, F_i^n 为第 i 个 n 元谓词.

例 2.2.2 给定解释 I 如下:

(1) 个体域 $D=\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ 为含 0 的自然数集);

(2) $\bar{a}=0$;

(3) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$;

(4) $\bar{F}(x,y)$: $x=y$.

在解释 I 下,下列哪些公式为真,哪些为假,哪些不能确定?

① $F(f(x,y),g(x,y))$.

② $F(f(x,a),y)\rightarrow F(g(x,y),z)$.

③ $\forall xF(g(x,a),x)\rightarrow F(x,y)$.

④ $\forall xF(g(x,a),x)$.

⑤ $\forall x\forall y\forall zF(f(x,y),z)$.

⑥ $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$.

解 ① 公式被解释成 $x+y=x\cdot y$,这不是命题.

② 公式被解释成$(x+0=y)\rightarrow(x\cdot y=z)$,这不是命题.

③ 公式被解释成 $\forall x(x\cdot 0=x)\rightarrow(x=y)$,由于蕴含式前件为假,所以被解释的公式为真.

④ 公式被解释成 $\forall x(x\cdot 0=x)$,为假命题.

⑤ 公式被解释成 $\forall x\forall y\forall z(x+y=z)$,这是真命题.

⑥ 公式被解释成 $\exists x(x+x=x\cdot x)$,这是真命题.

注 一个公式在不同的解释下具有不同的含义,往往具有不同的真值.

例 2.2.3 给定解释 I:

(1) 论域 $D=\{2,3\}$;

(2) D 中特定元素 $\bar{a}=2$;

(3) 一元函数 $\bar{f}:D\rightarrow D$ 为 $\bar{f}(2)=3,\bar{f}(3)=2$;

(4) 一元谓词 $\bar{F}(x)$:$x=3$,二元谓词 $\bar{G}(x,y)$:$(x,y)\in\{(2,2),(2,3),(3,2)\}$,二元谓词 $L(x,y)$:$(x,y)\in\{(2,2),(3,3)\}$.

在这个解释下,求下列公式的真值:

① $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$.

② $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$.

③ $\forall x\exists yL(x,y)$.

④ $\exists y\forall xL(x,y)$.

解 上述公式都是闭公式,所以不涉及任何指派可确定这些公式的真值.

① $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$为真当且仅当对于每个 $d\in D=\{2,3\}$,有 $F(d)\wedge G(d,a)$为真,而 $a=2$,所以 $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$为真当且仅当$(F(2)\wedge G(2,2))\wedge(F(3)\wedge G(3,2))$为真,而 $F(2)$为假,所以$(F(2)\wedge G(2,2))\wedge(F(3)\wedge G(3,2))$为假,即 $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$为假.

② $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$为真,当且仅当存在某个 $d\in D=\{2,3\}$,使得$(F(f(d))\wedge G(d,f(d)))$为真,即如果有$(F(f(2))\wedge G(2,f(2)))$为真或者$(F(f(3))\wedge G(3,f(3)))$为真,则 $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$为真,即 $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$的真值与$(F(f(2))\wedge G(2,f(2)))\vee(F(f(3))\wedge G(3,f(3)))$相同,即为真.

③ $\forall x\exists yL(x,y)$为真当且仅当对于每个 $d\in D=\{2,3\}$,有 $\exists yL(d,y)$为真,即当且仅当对于某个 $e\in D=\{2,3\}$,有 $L(2,e)\wedge L(3,e)$为真,即当且仅当$(L(2,2)\vee L(2,3))\wedge(L(3,2)\vee L(3,3))$为真,即 $\forall x\exists yL(x,y)$为真.

④ $\exists y\forall xL(x,y)$为真当且仅当对于某个 $d\in D$,有 $\forall xL(x,d)$为真,即$(\forall xL(x,2))\vee$

$(\forall xL(x,3))$为真，即当且仅当$(L(2,2)\land L(3,2))\lor(L(2,3)\land(3,3))$为真，所以$\exists y\forall xL(x,y)$的真值为假.

定义 2.2.8 设 A 为公式，若 A 在任何解释下均为真，则称 A 为**永真式**；若 A 在任何解释下均为假，则称 A 为**永假式**（或**矛盾式**）. 若至少存在一个解释使 A 为真，则称 A 为**可满足式**.

定义 2.2.9 设 A_0 是含命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的命题公式，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个谓词公式，用 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$处处代替 A_0 中的 P_i 所得公式 A，称 A 为 A_0 的代换实例.

定理 2.2.1 永真式的代换实例是永真式，矛盾式的代换实例为矛盾式.

证明留作练习，读者自证.

例 2.2.4 判断下列公式中哪些是永真式，哪些是矛盾式.

(1) $\exists x(F(x)\land G(x))$；

(2) $\forall xF(x,y)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x,y))$；

(3) $\forall xF(x)\land\neg\forall xF(x)$；

(4) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$.

解 对(1)给解释 I_1：个体域为实数集$\mathbb{R}$，$F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是无理数，在 I_1 下(1)为假，因而不是永真式. 对(1)给解释 I_2：个体域为实数集$\mathbb{R}$，$F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是实数，在 I_2 下(1)为真，因此公式是可满足式.

(2) 易知公式是 $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$代换实例，而该命题公式是永真式，所以公式(2)是永真式.

(3) 公式是 $P\land\neg P$ 的代换实例，而 $P\land\neg P$ 是矛盾式，故(3)是矛盾式.

(4) 对(4)给解释 I_2：个体域为自然数集合$\mathbb{N}$，$F(x,y)$为 $x\leqslant y$. 在 I_2 下(4)式的前件与后件均为真，(4)式为真，所以(4)式不是矛盾式. 再取 I_3：个体域仍为 N，$F(x,y)$为 $x=y$，在 I_3 下，(4)式的前件真，后件假，(4)式为假，所以(4)式不是永真式，故$\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$是非永真式的可满足式.

论域（也称个体域）是个体变元的取值范围，它规定了全称量词的意义. 解释规定了常元、函数符号、谓词符号的具体意义，但并没有给个体变元规定具体值，个体变元的取值由赋值规定.

2.3 一阶逻辑等值式与置换规则

在一阶逻辑中，一些命题可以有不同的符号化形式. 例如，命题“没有不犯错误的人”，在全总个体域中有下面两种不同的符号化形式.

(1) $\neg\exists x\ (F(x)\land\neg G(x))$；

(2) $\forall x\ (F(x)\rightarrow G(x))$.

其中，$F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 犯错误. 类似于命题逻辑，我们称(1)与(2)是等值的，下面给出等值式的定义.

定义 2.3.1 设 A,B 是一阶逻辑公式，若 $A\leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B **等值**，记作$A\Leftrightarrow B$，称 $A\Leftrightarrow B$ 为 A 与 B 的**等值式**.

由定义 2.3.1 可知，判断公式 A 与 B 是否等值，等价于判断公式 $A\leftrightarrow B$ 是否为永真式.

同命题逻辑中一样，证明一些常用的重要等值式，并用这些等值式推演出更多的等值式，这就是一阶逻辑等值演算的内容．下面给出一阶逻辑中的基本等值式．

第 1 组

由于命题逻辑中的重言式的代换实例都是一阶逻辑中的永真式，故在第 1 章 14 组等值式模式中给出的代换实例都是一阶逻辑的等值式．例如，如下等值式成立：

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \neg\neg \forall x F(x);$$

$$\forall x \exists y\, (F(x,y) \to G(x,y)) \Leftrightarrow \neg\neg \forall x \exists y\, (F(x,y) \to G(x,y));$$

$$F(x,y) \to G(x,y) \Leftrightarrow \neg F(x,y) \vee G(x,y);$$

$$F(x) \leftrightarrow G(x,y) \Leftrightarrow (F(x) \to G(x,y)) \wedge (G(x,y) \to F(x)).$$

第 2 组

（1）消去量词等值式

设个体域为有限集 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则有：

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n); \quad (2.3.1)$$

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n). \quad (2.3.2)$$

（2）量词否定律（量词转换律）

设个体变元在 $A(x)$ 中自由出现，则：

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \quad \text{（否定内移）}; \quad (2.3.3)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x). \quad (2.3.4)$$

以上两组等值公式可以从语义上去解释．

（3）量词收缩与扩张律

设个体变元 x 在 $A(x)$ 中自由出现，在 B 中不出现，则：

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B; \quad (2.3.5)$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B; \quad (2.3.6)$$

$$\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B; \quad (2.3.7)$$

$$\forall x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \forall x A(x); \quad (2.3.8)$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B; \quad (2.3.9)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B; \quad (2.3.10)$$

$$\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to B; \quad (2.3.11)$$

$$\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists x A(x). \quad (2.3.12)$$

（4）量词分配律

设 $A(x)$，$B(x)$ 为 x 自由出现的公式，则：

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \quad (\forall \text{ 对 } \wedge); \quad (2.3.13)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \quad (\exists \text{ 对 } \vee). \quad (2.3.14)$$

进行等值演算，除了以上基本等值式外，还有以下 3 条规则．

（1）置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 取代 $\Phi(A)$ 中的 A 得到的公式，若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$．

（2）约束变元换名规则

将某量词辖域中某个约束出现的个体变元及相应的指导变元,改成该量词辖域中未曾出现过的个体变元,其余不变,所得公式与原公式等值.

(3) 自由变元代入规则

对公式 A 中某自由出现的个体变元的所有出现,用 A 中未曾出现过的个体变元符号代替,A 中其余部分不变,所得公式与原公式等值.

注 (1) 换名是对约束变元而言的,更改时量词辖域中所有出现均需更改,改为该辖域中没有出现过的符号,最好是公式中没有出现过的符号.

(2) 代入针对自由变元而言的,对这个自由变元所有出现进行代入,代入的变元符号必须是公式中没有出现过的.

例 2.3.1 对公式 $\forall x(Q(x)\to R(x,y))\vee\exists zP(x,z)$换名.

解 由约束变元的换名规则得

$$\forall u(Q(u)\to R(u,y))\vee\exists zP(x,z),$$

或用自由变元代入规则得

$$\forall x(Q(x)\to R(x,y))\vee\exists zP(u,z).$$

下面的改名是否正确?请读者考虑.

(1) $\forall u(Q(u)\to R(x,y))\vee\exists zP(x,z)$;

(2) $\forall x(Q(u)\to R(u,y))\vee\exists zP(x,z)$;

(3) $\forall u(Q(u)\to R(x,y))\vee\exists zP(u,z)$;

(4) $\forall y(Q(y)\to R(y,y))\vee\exists zP(x,z)$.

例 2.3.2 证明:(1) $\forall x(F(x)\vee E(x))\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall xE(x)$不成立;

(2) $\exists x(F(x)\wedge E(x))\Leftrightarrow\exists xF(x)\wedge\exists xE(x)$不成立.

证明 给解释 I:设个体域为整数集合,$F(x)$:x 是奇数,$E(x)$:x 是偶数.

(1) $\forall x(F(x)\vee E(x))$的含义是:对任意整数 x,x 或者是奇数,或者是偶数,这是真命题. 而$\forall xF(x)\vee\forall xE(x)$的含义是:或者所有整数是奇数,或者都是偶数,这是假命题.

因此“$\forall$ 对 $\vee$”不具有分配律.

(2) $\exists xF(x)\wedge\exists xE(x)$的含义是:存在是奇数的整数,并且也存在是偶数的整数. 这是一个真命题. 而$\exists x(F(x)\wedge E(x))$的含义是:存在整数,它即是奇数,又是偶数,这是假命题.

因此“$\exists$ 对 $\wedge$”不具有分配律.

例 2.3.3 设个体域 $D=\{a,b,c\}$,消去下面各公式中的量词.

(1) $\exists xF(x)\to\forall yG(y)$;

(2) $\forall x\forall y(F(x)\to G(y))$.

解 (1) $\exists xF(x)\to\forall yG(y)\Leftrightarrow(F(a)\vee F(b)\vee F(c))\to(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))$.

(2) 方法 1 对公式不做变化,直接消去量词.

$$\begin{aligned}\forall x\forall y(F(x)\to G(y))&\Leftrightarrow\forall x((F(x)\to G(a))\wedge(F(x)\to G(b))\wedge(F(x)\to G(c)))\\&\Leftrightarrow((F(a)\to G(a))\wedge(F(a)\to G(b))\wedge(F(a)\to G(c)))\wedge\\&\quad((F(b)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(b)\to G(c)))\wedge\\&\quad((F(c)\to G(a))\wedge(F(c)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))).\end{aligned}$$

方法 2 先缩小量词辖域,然后再消量词.

$\forall x \forall y(F(x) \to G(y)) \Leftrightarrow \forall x(F(x) \to \forall yG(y))$

$\Leftrightarrow \exists xF(x) \to \forall yG(y)$

$\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \to (G(a) \wedge G(b) \wedge G(c))$.

可见,方法 2 要好得多,因此,当能够缩小量词辖域时,应先缩小量词辖域,然后再消量词.

例 2.3.4　证明　$\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$.

证明　$\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$　（置换规则）

$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x)) \vee \exists xB(x)$　（$\exists$ 对 $\vee$ 分配律）

$\Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee \exists xB(x)$　（量词转化律）

$\Leftrightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$.　（置换规则）

例 2.3.5　证明　$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)) \Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$.

证明　$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$　（量词转化律）

$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee H(x,y))$　（置换规则）

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$.　（置换规则）

定义 2.3.2　设 A 是不含联结词→和↔的谓词公式,则在其中以联结词 $\wedge$,$\vee$ 分别换为 $\vee$,$\wedge$,以量词 $\forall$,$\exists$ 分别换为 $\exists$,$\forall$,以常量 0,1 分别换为 1,0 后所得公式称为 A 的**对偶公式**,记作 A^*.

例 2.3.6　$A = \forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \vee 1$,求 A^*.

解　$A^* = \exists x \forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge 0$.

定理 2.3.1(对偶原理)　设公式 A,B 不含联结词→,↔.若 $A \Leftrightarrow B$,则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

证明留作练习,读者自证.

2.4　一阶逻辑前束范式

在命题逻辑里,每一公式都有与之等值的析取(合取)范式,对谓词逻辑公式来说,也有范式,其中前束范式与原公式等值,但是其他范式与原公式有较弱的关系.

定义 2.4.1　具有如下形式

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k B$$

的一阶逻辑公式,称作**前束范式**,其中 $Q_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$,B 为不含量词的公式.

例如　$\forall x \forall y((F(x) \wedge G(y)) \to H(x,y))$,

$\forall x \forall y \exists z((F(x) \wedge G(y) \wedge H(z)) \to L(x,z))$

等都是前束范式,而

$\forall x(F(x) \to \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$,

$\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \to H(x,y)))$

等不是前束范式.

定理 2.4.1　一阶逻辑中的任何公式都可化为与之等值的前束范式:

证明　构造性算法步骤如下:

(1) 消去联结词→,↔;

(2) 将联结词$\neg$向内深入，使之只作用于原子公式；

(3) 利用换名或代入规则使所有约束变元的符号均不相同，并且自由变元与约束变元的符号也不相同；

(4) 利用辖域的扩张与收缩律，将所有量词以在公式中出现的顺序移到公式最前面，扩大量词的辖域至整个公式.

例 2.4.1　求下列各公式的前束析取范式：

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$；

(2) $\exists xF(x)\wedge\forall xG(x)$；

(3) $\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$；

(4) $(\forall x_1F(x_1,x_2)\rightarrow\exists x_2G(x_2))\rightarrow\forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$.

解　(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$　(置换规则)

$\Leftrightarrow\exists x\neg F(x)\vee\exists yG(y)$　(量词转换律)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg F(x)\vee G(y))$.　(量词辖域扩张)

(2) $\exists xF(x)\wedge\forall xG(x)\Leftrightarrow\exists yF(y)\wedge\forall xG(x)$　(换名规则)

$\Leftrightarrow\exists y(F(y)\wedge\forall xG(x))$　(量词辖域扩张)

$\Leftrightarrow\exists y\forall x(F(y)\wedge G(x))$.　(量词辖域扩张)

(3) $\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)\Leftrightarrow\forall tF(t,y)\rightarrow\exists\omega G(x,\omega)$　(换名规则)

$\Leftrightarrow\exists t(F(t,y)\rightarrow\exists\omega G(x,\omega))$　(量词辖域扩张)

$\Leftrightarrow\exists t\exists\omega(F(t,y)\rightarrow G(x,\omega))$.　(量词辖域扩张)

(4) $(\forall x_1F(x_1,x_2)\rightarrow\exists x_2G(x_2))\rightarrow\forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftrightarrow(\forall x_4F(x_4,x_2)\rightarrow\exists x_5G(x_5))\rightarrow\forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$　(换名规则)

$\Leftrightarrow\exists x_4(F(x_4,x_2)\rightarrow\exists x_5G(x_5))\rightarrow\forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$　(量词辖域扩张)

$\Leftrightarrow\exists x_4\exists x_5(F(x_4,x_2)\rightarrow G(x_5))\rightarrow\forall x_1H(x_1,x_2,x_3)$　(量词辖域扩张)

$\Leftrightarrow\forall x_4\forall x_5\forall x_1(F(x_4,x_2)\rightarrow G(x_5))\rightarrow H(x_1,x_2,x_3)$.　(量词辖域扩张)

2.5　一阶逻辑的推理理论

利用谓词公式间的各种等值关系和蕴涵关系，通过一些推理规则，从一些谓词公式推出另一个谓词公式，这就是谓词演算的推理.

定义 2.5.1　对于公式 A 和 B，若 $A\rightarrow B\Leftrightarrow 1$，则称公式 A 蕴涵公式 B，记作 $A\Rightarrow B$.

定义 2.5.2　一阶逻辑中从前提 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 出发，推出结论 B，推理的形式结构为

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\rightarrow B. \tag{2.5.1}$$

若式(2.5.1)为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确.

看推理是否正确，就是要判断式(2.5.1)是否为蕴涵永真式. 这里着重介绍形式系统中的构造证明法.

在一阶逻辑中，称永真的蕴涵式为**推理定律**，下面介绍推理定律.

(Ⅰ) 命题逻辑推理定律的代换实例

例如：$\forall xF(x)\wedge\forall yG(y)\Rightarrow\forall xF(x)$；　(化简式代换实例)

$\forall xF(x)\Rightarrow\forall yG(y)\vee\forall xF(x)$.　(附加式代换实例)

（Ⅱ）基本等值式生成的推理定律

例如：$\forall xQ(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xQ(x)$；

$\neg\neg\forall xQ(x) \Rightarrow \forall xQ(x)$；

$\neg\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg A(x)$；

$\exists x\neg A(x) \Rightarrow \neg\forall xA(x)$；

$\forall x(A(x) \vee B) \Rightarrow \forall xA(x) \vee B$；

$\forall xA(x) \vee B \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B)$.

分别由双重否定律、量词交换律和量词收缩扩张律生成.

（Ⅲ）重要推理定律

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$；

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$；

$\forall x(A(x) \rightarrow \forall xB(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$；

$\exists x(A(x) \rightarrow \exists xB(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$.

（Ⅳ）推理规则

(1)（$\forall-$规则）全称量词消去规则：

$\forall xA(x) \Rightarrow A(y)$；

$\forall xA(x) \Rightarrow A(c)$.

$\forall-$成立的条件是：

① x 是 $A(x)$ 中自由出现的个体变元；

② y 为任意不在 $A(x)$ 中约束出现的个体变元或 c 为不在 $A(x)$ 中出现的个体常元.

$\forall-$规则表示：若个体域的所有个体具有性质 A，则个体域中任意一个个体具有性质 A. 因此在使用 $\forall-$规则时，必须保证当 $\forall xA(x)$ 为真时，$A(y)$（或 $A(c)$）必为真，条件(1)、(2)满足.

例如，个体域为实数集合$\mathbb{R}$，公式 $A(x)=\exists yF(x,y)$，其中 $F(x,y)$：$x>y$. 于是对 $\forall xA(x)=\forall x\exists yF(x,y)$ 使用 $\forall-$规则，若用 y（约束变元）取代 x 时，就会得到 $A(y)=\exists yF(y,y)$，即 $\exists y(y>y)$，这显然是假命题. 产生问题的原因是违背了条件②. 正确的做法可用 z 取代 x 得 $A(z)=\exists yF(z,y)=\exists y(z>y)$，这是真命题.

(2)（$\forall+$规则）全称量词引入规则：

$$A(y) \Rightarrow \forall xA(x).$$

$\forall+$规则成立的条件是：

① y 在 $A(y)$ 中自由出现，且 y 取任何值时，A 均为真.

② 取代 y 的 x 不能在 $A(y)$ 中约束出现，否则可能产生 $A(y)$ 为真而 $\forall xA(x)$ 为假的情况，出现错误.

例如，个体域为实数集$\mathbb{R}$，$F(x,y)$：$x>y$，$A(y)=\exists xF(x,y)$，显然 $A(y)$ 满足条件①，对 $A(y)$ 应用 $\forall+$时，若用约束出现的 x 取代 y，得到 $\forall xA(x)=\forall x\exists x(x>x)$，这是假命题. 产生错误的原因是违背了条件②.

(3)（$\exists+$规则）存在量词引入规则：

$$A(a) \Rightarrow \exists xA(x);$$

$$A(y) \Rightarrow \exists xA(x).$$

∃＋规则成立的条件是：

① a 是特定的个体常元；

② 取代 a 的 x 不能在 $A(a)$中出现过或取代 y 的 x 不能在 $A(y)$中出现过.

例如，设个体域为实数集$\mathbb{R}$，取 $L(x,y)$：$x<y$，取 $A(7)=\exists xL(x,7)$，则 $A(7)$为真命题. 由于 x 已在 $A(7)$中出现，若用 x 替换 7 得到$\exists xL(x,x)$，即$\exists xL(x<x)$是假命题. 出错的原因是违背了条件②.

(4) (∃－规则)存在量词消去规则：

$$\exists xA(x)\Rightarrow A(a);$$

$$\exists xA(x)\Rightarrow A(y).$$

∃－规则成立的条件是：

① a 是使 A 为真的特定的个体常元或 y 是使 A 为真的个体变元；

② a 不曾在 $A(x)$中出现过(y 不曾在 $A(x)$中出现过).

例 2.5.1　指出下面各证明序列中的错误.

(1) ① $F(x)\to\exists xG(x)$　　前提引入

② $F(c)\to G(c)$　　①∃－规则

(2) ① $\forall x(F(x)\vee G(x))$　　前提引入

② $F(a)\vee G(b)$　　①∀－规则

(3) ① $F(x)\to G(c)$　　前提引入

② $\exists x(F(x)\to G(x))$　　①∃＋规则

(4) ① $F(a)\to G(b)$　　前提引入

② $\exists x(F(x)\to G(x))$　　①∃＋规则

解　(1) ②错. 使用∀－，∀＋，∃－，∃＋规则应对前束范式，而①中公式不是前束范式，所以，不能使用∃－规则.

(2) ②错. ①中公式为$\forall xA(x)$，这时，$A(x)=F(x)\vee G(x)$，因而使用∀－规则时，应得 $A(a)$ (或 $A(y)$)，故应为 $F(a)\vee G(a)$，而不能为 $F(a)\vee G(b)$.

(3) ②错. ①中公式含个体变元 x，不能使用∃＋规则.

(4) ②错. ①中公式含两个个体常项，不能使用∃＋规则.

注　上述 4 条规则使用时需要注意以下两点：

(1) 在使用这 4 条规则时，必须严格按条件要求使用，否则会出现错误.

(2) 这 4 条规则的使用是针对前束范式的，只能对前束范式使用.

下面讨论一阶逻辑自然推理系统 L_N 中的构造性证明.

定义 2.5.3　自然推理系统 L_N 定义如下：

(Ⅰ) 字母表　同一阶语言的字母表.

(Ⅱ) 合式公式　同 L 的合式公式的定义.

(Ⅲ) 推理规则：

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

(5) 附加规则

(6) 化简规则

(7) 拒取式规则

(8) 假言三段论规则

(9) 析取三段论规则

(10) 构造性二难推理规则

(11) 合取引入规则

(12) $\forall -$规则

(13) $\forall +$规则

(14) $\exists -$规则

(15) $\exists +$规则

推理规则的(1)～(11)与命题逻辑的推理规则相同.

例 2.5.2　在自然推理系统 L_N 中构造下面推理的证明：有理数是实数，存在有理数，所以存在实数.

解　先符号化.

设 $F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是实数.

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists xF(x)$；

结论：$\exists xG(x)$.

证明
(1) $\exists xF(x)$	前提引入
(2) $F(c)$	(1) $\exists -$规则
(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
(4) $F(c)\rightarrow G(c)$	(3) $\forall -$规则
(5) $G(c)$	(2)、(4)假言推理
(6) $\exists xG(x)$	(5) $\exists +$规则

如果把(3)、(4)写在前，(1)、(2)写在后，即得下面的证明过程.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
(2) $F(c)\rightarrow G(c)$	(1) $\forall -$规则
(3) $\exists xF(x)$	前提引入
(4) $F(c)$	(3) $\exists -$规则
(5) $G(c)$	(2)、(4)假言推理
(6) $\exists xG(x)$	(5) $\exists +$规则

这里的证明在逻辑上是有错误的. 因为(2)中的 c 可以为个体域中特定的个体常元，而(4)中的 c 没有任意性，因此后来书写的个体 c 和(2)中的 c 就不一定表示同一个体，不能应用假言推理于(2)、(4)得到(5)中的 $G(c)$.

例 2.5.3　构造证明.

前提：$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，$\forall x\neg P(x)$；

结论：$\exists xQ(x)$.

证明　方法 1(直接证法)

(1) $\forall x(P(x)\vee Q(x))$	前提引入

(2) $P(c)\vee Q(c)$ (1)$\forall-$规则

(3) $\forall x\neg P(x)$ 前提引入

(4) $\neg P(c)$ (3)$\forall-$规则

(5) $Q(c)$ (2)、(4)析取三段

(6) $\exists xQ(x)$ (5)$\exists+$规则

方法 2(归谬法) (将否定结论作为前提得出矛盾)

(1) $\neg\exists xQ(x)$ 结论否定引入

(2) $\forall x\neg Q(x)$ (1)置换

(3) $\neg Q(c)$ (2)$\forall-$规则

(4) $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ 前提引入

(5) $P(c)\vee Q(c)$ (4)$\forall-$规则

(6) $P(c)$ (3)、(5)析取三段论

(7) $\forall x\neg P(x)$ 前提引入

(8) $\neg P(c)$ (7)$\forall-$规则

(9) $P(c)\wedge\neg P(c)$ (6)、(8)合取引入

出现矛盾,结论得证.

例 2.5.4 证明:$\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$.

证明 (附加前提法)

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 前提引入

(2) $P(c)\to Q(c)$ (1)$\forall-$规则

(3) $\forall xP(x)$ 附加前提

(4) $P(c)$ (3)$\forall-$规则

(5) $Q(c)$ (2)、(4)假言推理

(6) $\forall xQ(x)$ (5)$\forall+$规则

(7) $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ 附加前提回归

例 2.5.5 证明前提"在本离散数学课堂的每一个人学过一门计算机课程"和"李明是本课堂的学生"蕴含结论"李明学过一门计算机课程".

解 令 $D(x)$:x 在本离散数学课堂,$C(x)$:x 学过一门计算机课程,a:李明.

前提:$\forall x(D(x)\to C(x)),D(a)$;

结论:$C(a)$.

证明(1) $\forall x(D(x)\to C(x))$ 前提引入

(2) $D(a)\to C(a)$ (1)$\forall-$规则

(3) $D(a)$ 前提引入

(4) $C(a)$ (2)、(3)假言推理

例 2.5.6 证明.

前提:$\forall x(F(x)\to G(x)),\forall x(G(x)\to H(x))$;

结论:$\forall x(F(x)\to H(x))$.

证明 用直接证明法证明如下.

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引入

(2) $F(c)\to G(c)$　　(1) $\forall-$规则
(3) $\forall x(G(x)\to H(x))$　　前提引入
(4) $G(c)\to H(c)$　　(3) $\forall-$规则
(5) $F(c)\to H(c)$　　(2)、(4)假言三段论
(6) $\forall c(F(c)\to H(c))$　　(5) $\forall+$规则
(7) $\forall x(F(x)\to H(x))$　　(6)置换

例 2.5.7　证明苏格拉底三段论：

前提：所有的人都是要死的；苏格拉底是人.

结论：苏格拉底是要死的.

解　令 $P(x)$：x 是人，$Q(x)$：x 是要死的，c：苏格拉底. 则有

前提：$\forall x(P(x)\to Q(x))$，$P(a)$；

结论：$Q(a)$.

证明(1) $P(a)$　　前提引入
(2) $\forall x(P(x)\to Q(x))$　　前提引入
(3) $P(a)\to Q(a)$　　(2) $\forall-$规则
(4) $Q(a)$　　(1)、(3)假言推理

例 2.5.8　证明.

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists x(F(x)\land H(x))$；

结论：$\exists x(G(x)\land H(x))$.

证明　(1) $\exists x(F(x)\land H(x))$　　前提引入
(2) $F(c)\land H(c)$　　(1) $\exists-$规则
(3) $\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入
(4) $F(c)\to G(c)$　　(3) $\forall-$规则
(5) $F(c)$　　(2)化简
(6) $G(c)$　　(4)、(5)假言
(7) $H(c)$　　(2)化简
(8) $G(c)\land H(c)$　　(6)、(7)合取
(9) $\exists x(G(x)\land H(x))$　　(8) $\exists+$规则

注　(1) 在证明序列中先引进带存在量词的前提.

(2) 实行量词消去($\forall-$，$\exists-$)规则时，只能对前束范式应用. 如$\neg\exists x(P(x)\land H(x))$，$\neg\forall x(Q(x)\to G(x))$不能应用.

例 2.5.9　证明前提“在这个班上的某个人没有读过书”和“班上的每个人都通过了第一门考试”蕴含结论“通过考试的某个人没有读过书”.

解　令 $C(x)$：x 在这个班中，$B(x)$：x 读过书，$P(x)$：x 通过了第一门考试.

前提：$\exists x(C(x)\land\neg B(x))$，$\forall x(C(x)\to P(x))$；

结论：$\exists x(P(x)\land\neg B(x))$.

证明　(1) $\exists x(C(x)\land\neg B(x))$　　前提引入
(2) $C(a)\land\neg B(a)$　　(1) $\exists-$规则
(3) $C(a)$　　(2)化简

(4) $\forall x(C(x)\to P(x))$ 前提引入

(5) $C(a)\to P(a)$ (4) ∀－规则

(6) $P(a)$ (3)、(5)假言推理

(7) $\neg B(a)$ (2)化简

(8) $P(a)\wedge\neg B(a)$ (6)、(7)合取

(9) $\exists x(P(x)\wedge\neg B(x))$ (8) ∃＋规则

习 题 2

一、填空

1. 设 $F(x)$：x 是人，$H(x,y)$：x 与 y 一样高. 在一阶逻辑中，命题"人都一样高"的符号化形式为________.

2. 设 $C(x)$：x 是运动员，$G(x)$：x 是强壮的. 命题"没有一个运动员不是强壮的"可符合化为________，或者________.

3. 设 $G(x)$：x 是金子，$F(x)$：x 是闪光的. 则命题"金子是闪光的，但闪光的不一定是金子"符号化为________.

4. 设 $F(x)$：x 具有性质 F，$G(x)$：x 具有性质 G. 则命题"对所有的 x 而言，若 x 具有性质 F，则 x 就有性质 G"的符号化形式为________.

5. 设 $F(x)$：x 具有性质 F，$G(x)$：x 具有性质 G. 则命题"有的 x 既有性质 F 又有性质 G"的符号化形式为________.

6. 在一阶逻辑公式中将命题符号化时，若没有指明个体域，则使用________.

7. 公式 $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 的类型为________.

8. 公式 $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$ 的类型为________.

9. 由量词分配等值式，$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow$________.

10. 缩小量词的辖域，$\forall x(F(x)\to B)\Leftrightarrow$________.

二、用 0 元谓词将下列命题符号化.

1. 只要 4 不是素数，3 就是素数.（令 $F(x)$：x 是素数.）

2. 只有 2 是偶数，4 才是偶数.（令 $G(x)$：x 是偶数.）

3. 5 是奇数当且仅当 5 不能被 2 整除.（令 $F(x)$：x 是奇数，$G(x)$：x 能被 2 整除.）

三、在一阶逻辑中将下列命题符号化

1. 所有的整数，不是负整数，就是正整数，或者是 0.（令 $M(x)$：x 是整数，$F(x)$：x 是正整数，$H(x)$：x 是负整数，$R(x)$：x 是 0.）

2. 有的实数是有理数，有的实数是无理数.（令 $F(x)$：x 是实数，$G(x)$：x 是有理数，$H(x)$：x 是无理数.）

3. 不存在能表示成分数的无理数.（令 $F(x)$：x 是分数，$W(x)$：x 是无理数.）

4. 不存在最大的自然数.（令 $F(x)$：x 是自然数，$H(x,y)$：$x\geqslant y$.）

四、指出下列各公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现及约束出现的个体变元.

1. $\forall x(P(x)\wedge\exists xQ(x))\vee(\forall xP(x)\to Q(x))$.

2. $\forall x\forall y(R(x,y)\vee L(y,z))\wedge\exists xH(x,y)$.

五、设解释 T 如下：个体域为实数集$\mathbb{R}$，元素 $a=0$，函数 $f(x,y)=x-y$，特定谓词 $F(x,y)$：$x<y$. 根据解释 T，下列哪些公式为真？哪些为假？

1. $\forall xF(f(a,x),a)$.
2. $\forall x\forall y(\neg F(f(x,y),x))$.
3. $\forall x\exists yF(x,f(f(x,y),y))$.

六、给定解释 I 如下：

(a) 个体域 $D=\{m,n\}$；

(b) $f(x)$：$f(m)=n,f(n)=m$；

(c) $H(x,y)$：$H(m,m)=H(n,n)=0,H(m,n)=H(n,m)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值：

1. $\forall x\exists yH(x,y)$.
2. $\exists x\forall yH(x,y)$.
3. $\forall x\exists y(H(x,y)\rightarrow H(f(x),f(y)))$.

七、给定解释 T 如下：

(a) 个体域 $D=\{1,2,3,4\}$；

(b) $F(x)$：x 是 2 的倍数；$G(x)$：x 是奇数.

试求下列公式在 T 下的真值：

1. $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$.
2. $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$.
3. $\forall x(\neg F(x)\rightarrow G(x))$.

八、给定解释 T 如下：

(a) 个体域 $D=\{a,b,c,d\}$；

(b) $F(a)=F(c)=0;F(b)=F(d)=1;G(a)=G(c)=1;G(b)=G(d)=0$.

试求下列公式在 T 下的真值：

1. $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$.
2. $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$.
3. $\forall x(\neg F(x)\rightarrow G(x))$.

九、在有限的个体域内消去量词.

1. 个体域 $D=\{1,2,3\}$，公式为 $\forall x\forall y(F(x)\rightarrow G(y))$.
2. 设个体域 $D=\{a,b,c\}$，消去下述公式中的量词：
(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$；(2) $\exists x\forall yF(x,y)$.
3. 个体域 $D=\{a,b\}$，公式为 $\forall x\exists y(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$.
4. 个体域 $D=\{1,2,3\}$，公式为 $\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y))$.
5. 个体域 $D=\{a,b,c\}$，公式为 $\forall x\exists y(F(x)\land G(y))$.

十、给定解释 I 如下：

(a) 个体域 $D=\{3,4\}$；(b) $f(x)$：$f(3)=4,f(4)=3$；

(c) $F(x,y)$：$F(3,3)=F(4,4)=0,F(3,4)=F(4,3)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值：

1. $\forall x\exists yF(x,y)$.
2. $\exists x\forall yF(x,y)$.
3. $\forall x\exists y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$.

十一、选择

1. 下面谓词公式哪个是前束范式？(　　)
   A. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(F(x,y)\rightarrow G(z))$

B. $\neg(\forall x)(\exists y)H(x,y)$

C. $(\exists x)(\forall y)(\forall x)(F(x,y)\wedge G(x,y))$

D. $(\forall x)(H(x,y)\rightarrow(\exists y)G(y))$

2. 下列各式哪个不正确？(　　)

A. $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$

B. $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

C. $(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

D. $(\forall x)(P(x)\wedge Q)\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\wedge Q$

十二、在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明：

前提：$\neg p\vee r, \neg p\rightarrow q, q\rightarrow s$

结论：$\neg s\rightarrow r$

十三、符号化下列命题，并在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明.

1. 只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没离开，A 就是谋杀嫌犯. A 曾到过害者房间. 如果 A 在 11 点前离开，看门人会看见他. 看门人没有看见他. 所以 A 是谋杀嫌犯.

2. 如果今天是星期六，我们就要到颐和园或圆明园玩，如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园玩. 今天是星期六. 颐和园游人太多. 所以，我们去圆明园玩.

3. 如果小王是理科生，则他的数学成绩一定很好. 如果小王不是文科生，他一定是理科生. 小王的数学成绩不好. 所以小王是文科生.

4. 如果小张喜欢数学，则小李或小赵也喜欢数学. 若小李喜欢数学，则他也喜欢物理. 小张确实喜欢数学. 可小李不喜欢物理. 所以，小赵喜欢数学.

第3章

集 合

集合论是现代数学的基础,它的起源可以追溯到16世纪末期.为了追寻微积分的坚实的基础,人们只进行了有关数集的研究.直到1876—1883年,康托发表了一系列有关集合论的文章,对任意元素的集合进行了深入的探讨,提出了关于基数、序数和良序集等理论,奠定了集合论的深厚基础.但是,随着集合论的发展,以及它与数学哲学密切联系所作的讨论,在1900年前后出现了各种悖论,使集合论的发展一度陷入僵滞的局面.1904—1908年,策墨罗列出了第一个集合论的公理系统,他的公理,使数学哲学中产生的一些矛盾基本上得到统一,在此基础上逐步形成了公理化集合论和抽象集合论,使该学科成为数学中发展最为迅速的一个分支.本章介绍集合的一些基本知识.

3.1 集合的基本概念

在研究问题时,通常把具有某种性质的事物作为一个整体来研究,这个整体称为**集合**,其中的每个事物称为集合的**元素**.常用英文大写字母 A,B,C 等表示集合,以英文小写字母 a,b,c 等表示集合的元素.$a\in A$ 表示 a 是 A 的元素,$a\notin A$ 表示 a 不是 A 的元素.

定义 3.1.1 一个集合若由有限个元素组成,则称为**有限集**,否则称为**无限集**.特别地,元素个数为零的集合称为**空集**,记作"$\varnothing$".用符号"$|A|$"表示有限集 A 的元素个数.

常见的集合表示法分为枚举法和特性描述法.枚举法是将集合的元素一一列出.如集合 A 由元素 a,b,c,d 组成,可记为 $A=\{a,b,c,d\}$.特性描述法是用集合的元素所具有的共同性质来刻画集合.如 $A=\{x|x$ 是正偶数$\}$.一般集合可用 $A=\{x|P(x)\}$表示,其中 $P(x)$表示事物 x 满足性质 P,集合 A 由满足性质 P 的所有元素组成.

注 (1) 集合的元素具有确定性,即元素 $a\in A$ 或 $a\notin A$ 二者必居且仅居其一.

(2) 集合的确定不应引起悖论.如 $A=\{x|x\notin A\}$不能定义成为一个集合.

(3) 集合中的元素具有无序性.如$\{a,b\}=\{b,a\}$.

定义 3.1.2 集合间的关系有如下定义:

(1) 设 A,B 为集合,$A\subseteq B$ 表示 A 是 B 的**子集**,即如果 $a\in A$,则 $a\in B$.

(2) 设 A,B 为集合,$A\subset B$ 表示 A 是 B 的**真子集**,即 $A\subseteq B$ 且存在 $b\in B$ 使 $b\notin A$.

(3) 设 A,B 为集合,$A=B$ 表示 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,即 A 和 B 元素相同,称作 A 与 B **相等**.

(4) 称 $P(X)=\{A|A\subseteq X\}$为 X 的**幂集**,即 X 的所有子集组成的集合,有时也记为 2^X.

根据讨论问题的需要,常设一个充分大的集合为**全集**,也称为**基本集**,所讨论的集合均为这个集合的子集.

注 (1) X 含有 n 个元素,则 X 有 2^n 个子集,即 $P(X)$含有 2^n 个元素.

(2) 空集是任一集合的子集.

(3) 包含关系满足以下性质:

① $A\subseteq A$; (自反性)

② 若 $A\subseteq B, B\subseteq A$,则 $A=B$; (反对称性)

③ 若 $A\subseteq B, B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$. (传递性)

例 3.1.1 设 $A=\{a,b\}$,求 $P(A)$.

解 $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

注 $2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$,要区分$\varnothing$与$\{\varnothing\}$,其中$\varnothing$表示空集,其中没有任何元素,而$\{\varnothing\}$则表示以空集$\varnothing$为元素的一个集族,即$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

一般用$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$分别表示**自然数集**、**整数集**、**有理数集**、**实数集**、**复数集**,它们满足$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

3.2 集合的基本运算

集合有并、交、差、补、对称差等运算.

定义 3.2.1 设 A,B 为集合,A 与 B 的**并集**记作 $A\cup B$,其定义式为

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

定义 3.2.2 设 A,B 为集合,A 与 B 的**交集**记作 $A\cap B$,其定义式为

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

定义 3.2.3 设 A,B 为集合,A 与 B 的**差集**记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$,其定义式为

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

定义 3.2.4 设 X 为基本集,集合 A 的**补集**记作 A^c 或 $\overline{A}$,其定义式为

$$A^c=X-A=\{x \mid x\notin A \text{ 且 } x\in X\}.$$

定义 3.2.5 设 A,B 为集合,A 与 B 的**对称差**记作 $A\oplus B$,其定义式为

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A).$$

对称差也称为**布尔和**.

以上定义的并和交运算称为初级并和初级交.下面考虑推广的并和交运算,即广义并和广义交.

定义 3.2.6 设 A 为集合,A 的元素的元素构成的集合称作 **A 的广义并**,记作$\bigcup A$,符号化表示为

$$\bigcup A=\{x \mid \exists z\ (z\in A\wedge x\in z)\}.$$

例 3.2.1 设 $A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}, B=\{\{a\}\}, C=\{a,\{c,d\}\}$.则

$$\bigcup A=\{a,b,c,d,e,f\},\quad \bigcup B=\{a\},$$

$$\bigcup C=a\cup\{c,d\},\quad \bigcup\varnothing=\varnothing$$

根据广义并定义,我们有,若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则$\bigcup A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

定义 3.2.7 设 A 为集合,A 的元素的元素构成的集合称作 **A 的广义交**,记作$\bigcap A$,符号化表示为

$$\bigcap A=\{x \mid \forall z\ (z\in A\rightarrow x\in z)\}.$$

考虑例 3.2.1 中的集合,有

$$\bigcap A=\{a\},\quad \bigcap B=\{a\},\quad \bigcap C=a\cap\{c,d\}.$$

但空集∅不可以进行广义交,因为$\bigcap\varnothing$不是集合,在集合论中是没有意义的.和广义并类似,若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则$\bigcap A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$.

例 3.2.2 设 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$,计算$\bigcup\bigcup A$,$\bigcap\bigcap A$ 和$\bigcap\bigcup A\cup(\bigcup\bigcup A-\bigcup\bigcap A)$.

解 $\bigcup A=\{a,b\}$, $\bigcap A=\{a\}$, $\bigcup\bigcup A=a\cup b$,

$$\begin{aligned}\bigcap\bigcup A\cup(\bigcup\bigcup A-\bigcup\bigcap A)&=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)\\&=(a\cap b)\cup(b-a)\\&=b.\end{aligned}$$

所以$\bigcup\bigcup A=a\cup b$,$\bigcap\bigcap A=a$, $\bigcap\bigcup A\cup(\bigcup\bigcup A-\bigcup\bigcap A)=b$.

3.3 集合中元素的计数

集合的运算可以用**文氏图**表示.文氏图的构造方法如下:

E 是全集,圆 A,B 的内部为集合 A,B,如果没有关于集合不交的说明,任何两圆应彼此相交.图中的阴影区域表示集合 A,B 在相应运算下组成的集合.具体见图 3.3.1.

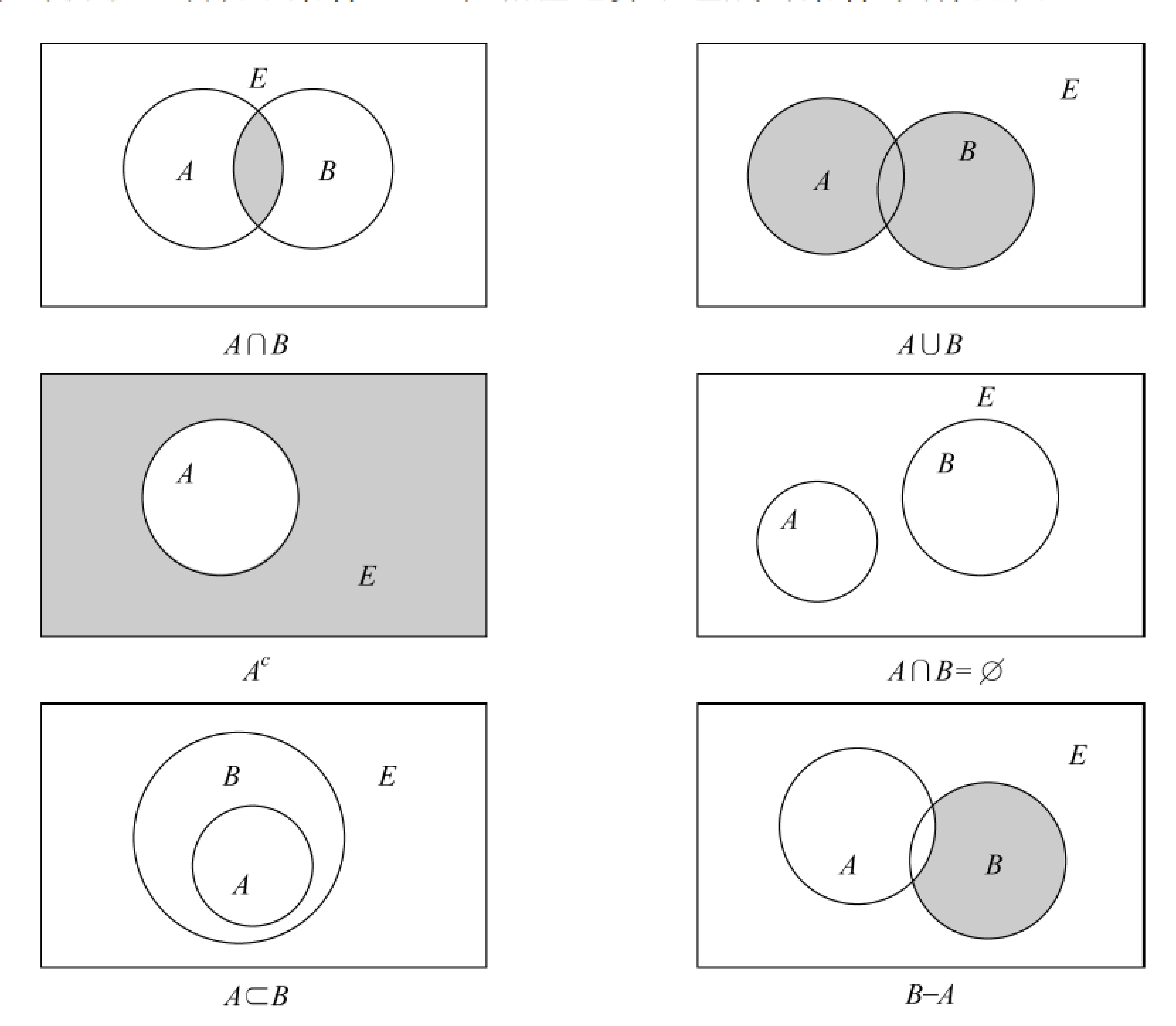


图 3.3.1

X 为集合,A,B,C 为 X 的子集,∪,∩,^{c} 为集合的并、交、补运算,有以下性质:

(1) $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$; (交换律)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; (结合律)

(3) $A\cup\varnothing=A, A\cap X=A$；　　(同一律)

(4) $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$；　　(互补律)

(5) $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$；　　(吸收律)

(6) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　　(分配律)

(7) $A\cup A=A, A\cap A=A$；　　(幂等律)

(8) $A\cup X=X, A\cap\varnothing=\varnothing$；　　(零律)

(9) $(A^c)^c=A$；　　(双重否定律)

(10) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.　　(德摩根律)

由以上性质知，在任何集合运算的公式中，将$\cup$与$\cap$互换，公式仍然成立. 这就是集合论的对偶原则.

定理 3.3.1(包含排斥原理)　设 S 为有限集合，$P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 m 个性质. S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i 或者不具有性质 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$两种情况必居其一. 令 A_i 表示具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素个数为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}| &= |S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j| \\ &\quad -\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ &\quad +\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned}$$

推论　S 中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m| \\ =&\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ &-\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned}$$

当 $m=2$ 时，有

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|.$$

当 $m=3$ 时，有

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|=&|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3| \\ &-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned}$$

一般包含排斥原理又称为容斥原理.

例 3.3.1　有 120 个学生参加考试，这次考试有 3 道题 A, B, C，考试结果如下：12 个学生 3 道题都做对了，20 个学生做对 A, B 两道题，16 个学生做对 A, C 两道题，28 个学生做对 B, C 两道题，做对 A 题的有 48 个学生，做对 B 题的有 56 个学生，还有 16 个学生一道题也没做对. 求做对 C 题的学生有多少个？

解　设做对 A 题的学生为 P_1，做对 B 题的学生为 P_2，做对 C 题的学生为 P_3，由题意，根据容斥原理可知

$|P_1\cap P_2\cap P_3|=12, |P_1\cap P_2|=20, |P_1\cap P_3|=16, |P_2\cap P_3|=28$,

$|P_1|=48, |P_2|=56, |\overline{P_1\cup P_2\cup P_3}|=16$，所以 $|P_1\cup P_2\cup P_3|=120-16=104$,

而

$$|P_1\cup P_2\cup P_3|=|P_1|+|P_2|+|P_3|-|P_1\cap P_2|-|P_1\cap P_3|$$
$$-|P_2\cap P_3|+|P_1\cap P_2\cap P_3|,$$

因此$|P_3|=52$,所以做对了 C 题的学生有 52 人.

习　题　3

1. 设 A,B 为集合,试确定下列各式成立的充分必要条件:(直接写结论就可以)

(1) $A-B=B$;(2) $A-B=B-A$;(3) $A\cap B=B\cup A$;(4) $A\oplus B=A$.

2. 证明　$(A\cup B=A\cup C)\wedge(A\cap B=A\cap C)\Rightarrow B=C$.

3. 求下列集合的幂集:

(1) $A=\{a,b,c\}$,则 $P(A)=$________;

(2) $B=\{1,\{2,3\}\}$,则 $P(B)=$________;

(3) $C=\{\varnothing\}$,则 $P(C)=$________;

(4) $D=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,则 $P(D)=$________.

4. 设 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,4\}$,$B=\{1,2,5\}$,$C=\{2,4\}$,求下列集合(用枚举法写出集合的具体元素):

(1) $A\cap B^{\mathrm{c}}$;

(2) $(A\cap B)\cup C^{\mathrm{c}}$;

(3) $(A\cap B)^{\mathrm{c}}$;

(4) $P(A)\cap P(B)$;

(5) $P(A)-P(B)$.

5. 用枚举法表示下面的集合:

(1) $S_1=\{x\mid x=2\vee x=5\}$;

(2) $S_2=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge 3<x<12\}$;

(3) $S_3=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge x^2-1=0\wedge x>3\}$;

(4) $S_4=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\mathbb{Z}\wedge 0\leqslant x\leqslant 2\wedge -1\leqslant y\leqslant 0\}$.

6. 设 $A=\{2,a,\{3\},4\}$,$B=\{\varnothing,4,\{a\},3\}$,$C=\{\{\{1,2\}\},\{1\}\}$. 求:(1) $A\oplus B=$________;(2) $P(C)=$________.

7. 设 $S=\{2,a,\{3\},4\}$,$R=\{\{a\},3,4,1\}$,指出下面的写法哪些是对的,哪些是错的.

(1) $\{a\}\in S$;　(2) $\{a\}\in R$;　(3) $\{a,4\{3\}\}\subseteq S$;

(4) $\{\{a\},1,3,4\}\subset R$;　(5) $S=R$;　(6) $\{a\}\subseteq S$;

(7) $\{a\}\subseteq R$;　(8) $\varnothing\subseteq R$;　(9) $\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq R$;

(10) $\{\varnothing\}\subseteq S$;　(11) $\varnothing\in R$;　(12) $\varnothing\subseteq\{\{3\},4\}$.

第 4 章 二元关系和函数

第 3 章讨论了集合及集合的运算，本章研究集合内元素的关系以及集合间元素的关系，这就是关系和函数. 关系和函数是很重要的数学概念，它在计算机科学技术中的许多方面有着重要的应用，如数据结构、数据库、情报检索、算法分析等. 本章主要讨论二元关系理论.

4.1 集合的笛卡儿积与二元关系

定义 4.1.1 由两个元素 x 和 y（允许 $x=y$）按一定顺序排列成的二元组，称为一个**有序对**或**序偶**，记作 $\langle x,y\rangle$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素.

有序对 $\langle x,y\rangle$ 具有如下性质：

1. 当 $x\neq y$ 时，$\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$.

2. $\langle x_1,y_1\rangle=\langle x_2,y_2\rangle$ 的充要条件是 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.

上述两条性质是二元集 $\{x,y\}$ 所不具备的. 例如，当 $x\neq y$ 时，有 $\{x,y\}=\{y,x\}$. 原因在于集合中的元素是无序的，而有序对中的元素是有序的.

例 4.1.1 已知 $\langle x+2,3\rangle=\langle 3,2x+y\rangle$，求 x 和 y.

解 由有序对相等的充要条件，有

$$\begin{cases}x+2=3,\\ 2x+y=3.\end{cases}$$

解得 $x=1,y=1$.

定义 4.1.2 设 A,B 为两个集合，所有第一元素属于 A，第二元素属于 B 的序偶所组成的集合，称为集合 A 和集合 B 的**笛卡儿乘积**. 记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

例 4.1.2 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1\}$，$C=\{\varnothing\}$，试求 $A\times B$，$B\times A$，$A\times A$，$B\times B$，$C\times C$，$(A\times B)\times C$ 和 $A\times(B\times C)$.

解 $A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle\}$，$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,b\rangle\}$，

$A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，

$B\times B=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$，

$C\times C=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle\}$，

$(A\times B)\times C=\{\langle\langle a,0\rangle,\varnothing\rangle,\langle\langle a,1\rangle,\varnothing\rangle,\langle\langle b,0\rangle,\varnothing\rangle,\langle\langle b,1\rangle,\varnothing\rangle\}$，

$B\times C=\{\langle 0,\varnothing\rangle,\langle 1,\varnothing\rangle\}$，

$A\times(B\times C)=\{\langle a,\langle 0,\varnothing\rangle\rangle,\langle a,\langle 1,\varnothing\rangle\rangle,\langle b,\langle 0,\varnothing\rangle\rangle,\langle b,\langle 1,\varnothing\rangle\rangle\}$.

如果 $|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$. 从例 4.1.2 不难看出笛卡儿积具有如下性质：

性质 1 对任意集合 A，根据定义有

$$A\times\varnothing=\varnothing,\quad \varnothing\times A=\varnothing.$$

性质 2 一般地说，笛卡儿积元素不满足交换律，即

$$A\times B\neq B\times A\quad (\text{当 } A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B \text{ 时}).$$

性质 3 笛卡儿积运算不满足结合律，即

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\quad (\text{当 } A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing \text{ 时}).$$

性质 4 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A),$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),$$
$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A).$$

证明 我们只证明第一个等式. 任取 $\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$，则有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)&\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C),\end{aligned}$$

所以有 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

类似地可以证明其他情形.

性质 5 $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$.

采用命题演算的方法，可以证明性质 5. 该证明留给读者考虑.

值得注意的是，性质 5 的逆命题不成立，分以下几种情况讨论：

(1) 当 $A=B=\varnothing$ 时，显然有 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 成立.

(2) 当 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$ 时，也有 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 成立. 具体证明如下：

任取 $x\in A$，由于 $B\neq\varnothing$，则存在 $y\in B$. 所以有 $\langle x,y\rangle\in A\times B\subseteq C\times D$. 由笛卡儿积的定义有 $x\in C$ 且 $y\in D$.

(3) 当 $A=\varnothing$ 但 $B\neq\varnothing$ 时，有 $A\subseteq C$ 成立，但不一定有 $B\subseteq D$ 成立. 例如，取 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$，$D=\{3\}$.

(4) 当 $A\neq\varnothing$ 但 $B=\varnothing$ 时，有 $B\subseteq D$ 成立，不一定有 $A\subseteq C$ 成立. 例如，$A=\{1\}$，$B=\varnothing$，$C=\{2\}$，$D=\{3\}$.

例 4.1.3 设 $A=\{1,2\}$，求 $P(A)\times A$.

解 $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，$P(A)\times A=\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\{1\},1\rangle,\langle\{1\},2\rangle,\langle\{2\},1\rangle,\langle\{2\},2\rangle,\langle\{1,2\},1\rangle,\langle\{1,2\},2\rangle\}$.

例 4.1.4 设 A,B,C,D 为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由.

(1) $A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$；

(2) $A-B\times C=(A-B)\times(A-C)$；

(3) $A=B\wedge C=D\Rightarrow A\times C=B\times D$；

(4) 存在集合 A，使得 $A\subseteq A\times A$.

解 (1) 不一定为真，当 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$时，有 $A\times B=\varnothing=A\times C$，但是 $B\neq C$.

(2) 不一定为真，当 $A=B=\{2\}$，$C=\{3\}$时，有

$$A-(B\times C)=\{2\}-\{\langle 2,3\rangle\}=\{2\},$$
$$(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{2\}=\varnothing.$$

(3) 为真.

(4) 为真. 取集合 $A=\varnothing$时，有 $A\subseteq A\times A$.

定义 4.1.3 如果一个集合满足下列条件之一：

(1) 集合是空集；

(2) 集合非空，且集合中元素都是有序对，则称该集合为一个**二元关系**，记作 R. 二元关系也可简称为关系. 对于二元关系 R，如果 $\langle x,y\rangle\in R$，可记作 xRy；如果 $\langle x,y\rangle\notin R$，则记作 $x\not R y$.

例如，$R_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle a,b\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,3\rangle,a,b\}$，则 R_1 是二元关系，但 R_2 不是二元关系，R_2 只是一个集合，按照上面记法，可以写成 $1R_1 3$，$aR_1 b$，$1\not R_1 a$.

定义 4.1.4 设 A，B 为集合，$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系，称为从 A 到 B 的**二元关系**. 特别地，当 $A=B$ 时称为 A 上的二元关系.

例如，$A=\{0,1\}$，$B=\{1,2,3\}$，那么

$$R_1=\{\langle 0,2\rangle\},\quad R_2=A\times B,\quad R_3=\varnothing,\quad R_4=\{\langle 0,1\rangle\}$$

都是从 A 到 B 的二元关系，特别地，R_3，R_4 也是 A 上的二元关系.

一个集合 A 上二元关系的个数依赖于集合 A 中元素的个数，如果 $|A|=n$，那么 $|A\times A|=n^2$，$A\times A$ 的子集就有 2^{n^2} 个. 每一个子集代表集合 A 上的一个二元关系，所以集合 A 上就有 2^{n^2} 个不同的二元关系. 例如 $|A|=3$，则 A 上就有 $2^{3^2}=512$ 个不同的二元关系.

定义 4.1.5 对于任何集合 A，空集 $\varnothing\subseteq A\times A$，空集称为集合 A 上的空关系；定义集合

$$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A,$$
$$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\},$$

则称集合 E_A，I_A 分别为集合 A 上的**全域关系**和**恒等关系**.

例如，集合 $A=\{1,2\}$，则

$$E_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\},$$
$$I_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}.$$

除了上述三种特殊关系以外，还有一些常用的关系，分别说明如下.

如果 $A\subseteq R$，则关系 L_A 称为集合 A 上的小于或等于关系；B 是非零整数集合的子集，则关系 D_B 称为集合 B 上的整除关系；集合 A 上由一些集合构成的集族，则关系 $R_\subseteq$ 称为集合 A 上的包含关系. 例如 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，则

$$L_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\},$$
$$D_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}.$$

令 $A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，则集合 A 上的包含关系

$R_\subseteq=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle,\langle\varnothing,\{a,b\}\rangle,\langle\{a\},\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,$
$\langle\{b\},\{b\}\rangle,\langle\{b\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle\}.$

类似地还可以定义大于等于关系、小于关系、大于关系、真包含关系，等等.

例 4.1.5 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，R 是定义在集合 A 上的二元关系，试用列元素法表示

关系 R.

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x$ 是 y 的倍数$\}$；

(2) $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\}$；

(3) $R=\{\langle x,y\rangle \mid \frac{x}{y}$是素数$\}$；

(4) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x\neq y\}$.

解 (1) $R=\{\langle 5,5\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$.

(2) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$.

(3) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.

(4) $R=E_A-I_A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 5,4\rangle\}$.

关系的表示方法有三种：集合表示法、关系矩阵和关系图. 例 4.1.5 中给出的关系就是用集合表示法给出的. 对于有限集合 A 上的关系，还可以用其他两种方式来给出.

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 是 A 上的关系. 令

$$r_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{若 } x_iRy_j,\\ 0, & \text{若 } x_i \not R y_j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则

$$(r_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}$$

是 R 的关系矩阵，记作 $\boldsymbol{M}_R$.

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，则 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 是 A 上的关系，令图 $G=\langle V,E\rangle$，其中顶点集合 $V=A$，边集为 E. $\forall x_i,x_j\in V$，满足

$$\langle x_i,x_j\rangle\in E\Leftrightarrow x_iRx_j,$$

称图 G 为 R 的关系图，记作 G_R.

在上例子中，R 的关系图 G_R 如图 4.1.1 所示.

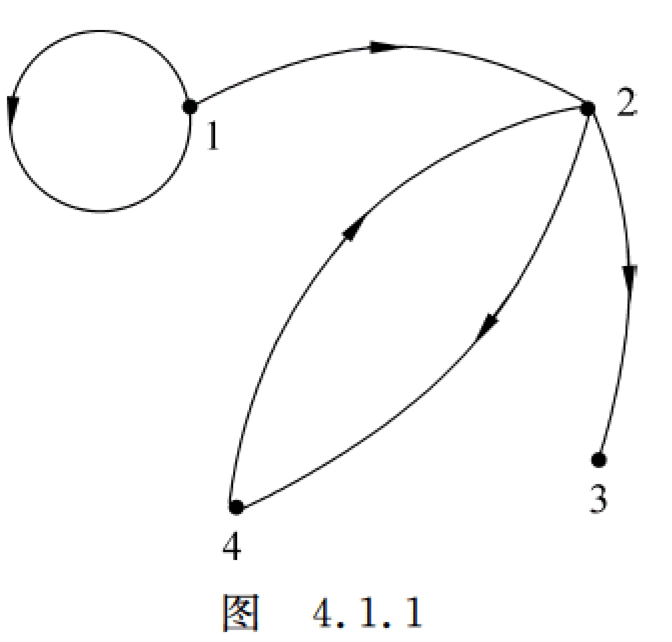


图 4.1.1

4.2 关系的运算

本节主要介绍关系的 7 种基本运算.

定义 4.2.1 设 R 是二元关系.

(1) R 中所有的有序对的第一元素构成的集合称为 R 的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}R$，即表示为

$$\mathrm{dom}R=\{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle\in R)\};$$

(2) R 中所有的有序对的第二元素构成的集合称为 R 的**值域**，记作 $\mathrm{ran}R$，即表示为

$$\mathrm{ran}R=\{y \mid \exists x(\langle x,y\rangle\in R)\};$$

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的**域**，记作 $\mathrm{fld}R$，即表示为

$$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R.$$

例 4.2.1　$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$，则 R 的定义域、值域及域分别为 $\mathrm{dom}R=\{1,2,4\}$，$\mathrm{ran}R=\{2,3,4\}$，$\mathrm{fld}R=\{1,2,3,4\}$.

定义 4.2.2　设 R 为二元关系，R 的逆关系，简称 R 的逆，记作 R^{-1}，其中

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in R\}.$$

定义 4.2.3　设 F，G 为二元关系，G 对 F 的右复合记作 $F\circ G$，其中

$$F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G)\}.$$

例 4.2.2　设 $F=\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$，$G=\{\langle 2,3\rangle\}$，则

$$F^{-1}=\{\langle 3,3\rangle,\langle 2,6\rangle\},F\circ G=\{\langle 6,3\rangle\},\ G\circ F=\{\langle 2,3\rangle\}.$$

类似地也可以定义关系的左复合，即

$$F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists t(\langle x,t\rangle\in G\wedge\langle t,y\rangle\in F)\}.$$

如果我们把二元关系看作一种作用，$\langle x,y\rangle\in R$ 可以解释为 x 通过 R 的作用变到 y，那么右复合 $F\circ G$ 与左复合 $F\circ G$ 都表示两个作用连续发生. 所不同的是：右复合 $F\circ G$ 表示在右边的 G 是复合到 F 上的第二步作用. 而左复合 $F\circ G$ 恰好相反，其中 F 是复合到 G 上的第二步作用. 这两种规定都是合理的，正如在交通规则中有的国家规定右行，有的国家规定左行一样. 本书采用右复合的定义，而在其他的书中可能采用左复合的定义，请读者注意两者的区别.

定义 4.2.4　设 R 为集合 A 上的二元关系.

(1) R 在 A 上的限制记作 $R\upharpoonright A$，其中

$$R\upharpoonright A=\{\langle x,y\rangle \mid xRy\wedge x\in A\}.$$

(2) A 在 R 下的像记作 $R[A]$，其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A).$$

不难看出，R 在 A 上的限制 $R\upharpoonright A$ 是 R 的子关系，而 A 在 R 下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集.

例 4.2.3　设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，则

$$R\upharpoonright\{1\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\},\quad R\upharpoonright\varnothing=\varnothing,$$

$$R\upharpoonright\{2,3\}=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\},\quad R[\{1\}]=\{2,3\},$$

$$R[\varnothing]=\varnothing,\quad R[\{3\}]=\{2\}.$$

关系是集合，因此前面所定义的集合运算对于关系也是适用的. 为了使集合表达式更为简洁，我们进一步规定：本节所定义的关系运算中逆运算优先于其他运算，而所有的关系运算都优先于集合运算，对于没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序. 例如

$$\mathrm{ran}F^{-1},F\circ G\cup F\circ H,\mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$$

等都是合理的表达式.

下面介绍这些基本运算的性质.

定理 4.2.1 设 F 是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$；

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$，$\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

证明 (1) 任取 $\langle x,y\rangle$，由关系逆的定义，有

$$\langle x,y\rangle\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in F^{-1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F,$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取 x，则有

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1}\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in F^{-1})\Leftrightarrow\exists y(\langle y,x\rangle\in F)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F,$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理 4.2.2 设 F,G,H 是任意的关系，则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$；

(2) $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$.

证明 (1) 任取 $\langle x,y\rangle$，则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in(F\circ G)\circ H&\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in F\circ G\wedge\langle t,y\rangle\in H)\\&\Leftrightarrow\exists t(\exists s(\langle x,s\rangle\in F\wedge\langle s,t\rangle\in G)\wedge\langle t,y\rangle\in H)\\&\Leftrightarrow\exists t\exists s(\langle x,s\rangle\in F\wedge\langle s,t\rangle\in G\wedge\langle t,y\rangle\in H)\\&\Leftrightarrow\exists s(\langle x,s\rangle\in F\wedge\exists t(\langle s,t\rangle\in G\wedge\langle t,y\rangle\in H))\\&\Leftrightarrow\exists s(\langle x,s\rangle\in F\wedge\langle s,y\rangle\in G\circ H)\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\circ(G\circ H),\end{aligned}$$

所以有

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H).$$

(2) 任取 $\langle x,y\rangle\in(F\circ G)^{-1}$，则有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in(F\circ G)^{-1}&\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in F\circ G\\&\Leftrightarrow\exists t(\langle y,t\rangle\in F\wedge\langle t,x\rangle\in G)\\&\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in G^{-1}\wedge\langle t,y\rangle\in F^{-1})\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in G^{-1}\circ F^{-1},\end{aligned}$$

所以有

$$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}.$$

定理 4.2.3 设 R 为 A 上的关系，则

$$R\circ I_A=I_A\circ R=R.$$

证明 任取 $\langle x,y\rangle\in R\circ I_A$，则有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\circ I_A&\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in R\wedge\langle t,y\rangle\in I_A)\\&\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in R\wedge t=y)\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R,\end{aligned}$$

从而有 $R\circ I_A\subseteq R$.

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge y\in A\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,y\rangle\in I_A\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\circ I_A,\end{aligned}$$

从而有 $R\subseteq R\circ I_A$. 综合上述，有

$$R\circ I_A=R.$$

应用同样方法，可证 $I_A\circ R=R$.

定理 4.2.4　设 F,G,H 为任意关系，则

(1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$；

(2) $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$；

(3) $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$；

(4) $(G\cap H)\circ F\subseteq G\circ F\cap H\circ F$.

证明　我们仅针对(3)给出证明，其他留作练习.

(3) 任取 $\langle x,y\rangle\in F\circ(G\cap H)$，则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in F\circ(G\cap H)&\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G\cap H)\\&\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G\wedge\langle t,y\rangle\in H)\\&\Leftrightarrow\exists t((\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G)\wedge(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in H))\\&\Rightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G)\wedge\exists t(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in H)\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\circ G\wedge\langle x,y\rangle\in F\circ H\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\circ G\cap F\circ H,\end{aligned}$$

所以有

$$F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H.$$

由数学归纳法不难证明定理 4.2.4 的结论对于有限多个关系的并和交也是成立的，即有

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n)=R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\cdots\cup R\circ R_n;$$
$$(R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n)\circ R=R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\cdots\cup R_n\circ R;$$
$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\cdots\cap R\circ R_n;$$
$$(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\cdots\cap R_n\circ R.$$

定理 4.2.5　设 F 为关系，A,B 为集合，则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$；

(2) $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$；

(3) $F\upharpoonright(A\cap B)=F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$；

(4) $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$.

证明　我们仅针对(1)和(4)给出证明，其他留作练习.

(1) 任取 $\langle x,y\rangle\in F\upharpoonright(A\cup B)$，则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in F\upharpoonright(A\cup B)&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\cup B\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\wedge(x\in A\vee x\in B)\\&\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A)\vee(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in B)\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\upharpoonright A\vee\langle x,y\rangle\in F\upharpoonright B\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B,\end{aligned}$$

所以有 $F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$.

(4) 任取 $y\in F[A\cap B]$，则

$$\begin{aligned}y\in F[A\cap B]&\Leftrightarrow\exists x(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\cap B)\\&\Leftrightarrow\exists x(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\wedge x\in B)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists x((\langle x,y\rangle \in F \land x \in A) \land (\langle x,y\rangle \in F \land x \in B))$$
$$\Rightarrow \exists x(\langle x,y\rangle \in F \land x \in A) \land \exists x(\langle x,y\rangle \in F \land x \in B)$$
$$\Leftrightarrow y \in F[A] \land y \in F[B]$$
$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B],$$

所以有 $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

在右复合的基础上可以定义关系的幂运算.

定义 4.2.5 设 R 为集合 A 上的关系,n 为自然数,则关系 R 的 n 次幂定义为

(1) $R^0 = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\} = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$.

由定义可知,对于集合 A 上的任何关系 R_1 和 R_2,都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A,$$

即集合 A 上任何关系的 0 次幂都相等,都等于集合 A 上的恒等关系 I_A. 此外,集合 A 上的任何关系 R 都恒有 $R^1 = R$. 事实上

$$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R.$$

给定集合 A 上的关系 R 和自然数 n,如何计算 R^n 呢? 若 n 是 0 或 1,结果很容易计算. 下面考虑 $n \geqslant 2$ 的情形. 如果 R 是以集合表达式给出的,可以通过 $n-1$ 次右复合计算 R^n. 如果 R 是用关系矩阵 $\boldsymbol{M}$ 给出的,则 R^n 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}^n$,即 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 的乘积. 与普通矩阵乘法不同的是,其中的加法运算是逻辑加,也就是逻辑运算中的析取运算,即

$$1+1=1,\quad 1+0=1,\quad 0+1=1,\quad 0+0=0.$$

如果 R 是用关系图 G 给出的,可以直接由图 G 得到 R 的关系图 G',G' 的顶点集与 G 相同. 考查 G 的每个顶点 x,如果在 G 中从 x_i 出发经过 n 步长的路径到达顶点 x_j,则在 G' 中加一条从 x_i 到 x_j 的边. 当把所有这样的边都找到以后,就得到图 G'.

例 4.2.4 设 $A=\{a,b,c,d\}$,$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,求 R 的各次幂,分别用关系矩阵和关系图表示.

解 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则 R^2, R^3, R^4 的关系矩阵分别是

$$\boldsymbol{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^3 = \boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见，$M^4=M^2$，即 $R^4=R^2$. 故可以得到

$$R^2 = R^4 = R^6 = \cdots, R^3 = R^5 = R^7 = \cdots$$

而 R^0，即 I_A 的关系矩阵是

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

至此，R 各次幂的关系矩阵都得到了.

用关系图的方法得到 $R^0, R^1, R^2, R^3, \cdots$ 的关系图如图 4.2.1 所示.

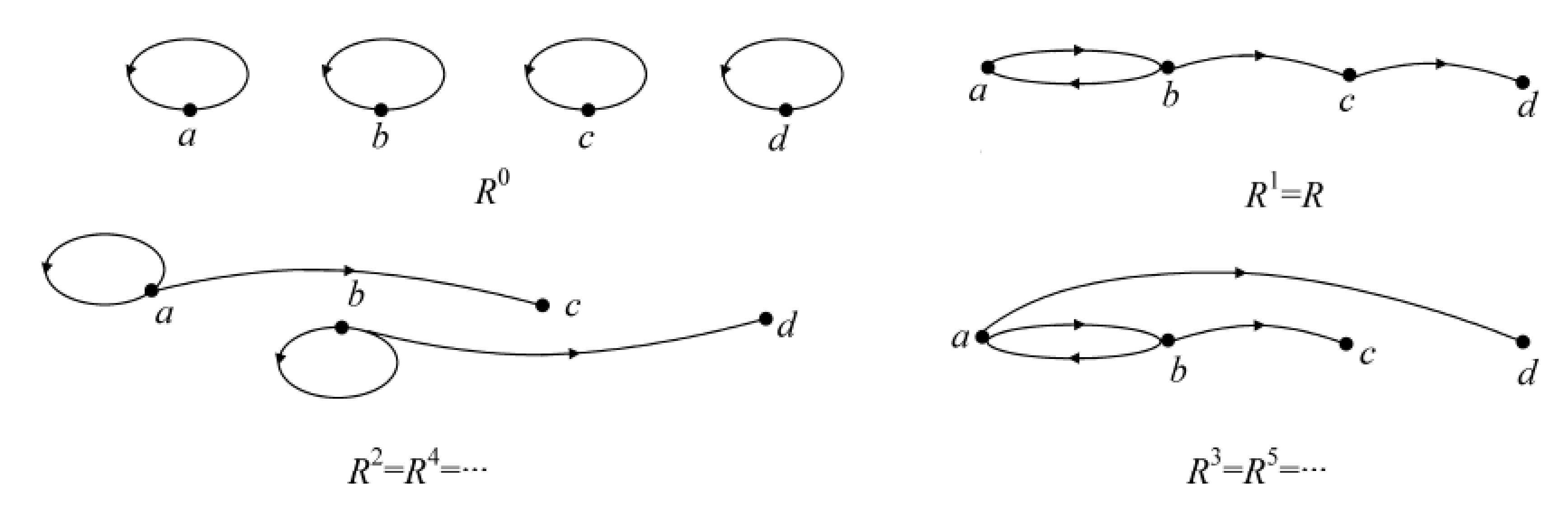


图　4.2.1

下面给出幂运算的性质.

定理 4.2.6　设 A 为含有 n 个元素的集合，R 是集合 A 上的二元关系，则存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$.

证明　R 为集合 A 上的二元关系，对任何自然数 k，R^k 都是 $A\times A$ 的子集. 又知 $|A\times A|=n^2$，$|P(A\times A)|=2^{n^2}$，即 $A\times A$ 的不同的子集仅 2^{n^2} 个. 当列出 R 的各次幂 R^0，$R^1, R^2, \cdots, R^{2^{n^2}}, \cdots$，时，必存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$.

该定理表明，有限集合上只有有限多个不同的二元关系. 当 t 足够大时，R^t 必与某个 R^s $(s<t)$ 相等. 如例 4.2.4 中的 $R^4=R^2$.

定理 4.2.7　设 R 为集合 A 上的二元关系，$m,n\in\mathbb{N}$，则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$;

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$.

证明　下面利用数学归纳法进行证明.

(1) 对于任意给定的 $m\in\mathbb{N}$，对 n 用归纳法.

若 $n=0$，则有

$$R^m\circ R^0=R^m\circ I_A=R^m=R^{m+0}.$$

假设 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$，则有

$$R^m\circ R^{n+1}=R^m\circ(R^n\circ R)=(R^n\circ R^n)\circ R=R^{m+n}\circ R=R^{m+n+1},$$

所以对一切 $m,n\in\mathbb{N}$，有 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$.

(2) 对于任意给定的 $m\in\mathbb{N}$，对 n 用归纳法.

若 $n=0$，则有

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\cdot 0}.$$

假设 $(R^m)^n=R^{mn}$，则有

$$(R^m)^{n+1}=(R^m)^n\circ R^m=R^{m\cdot n}\circ R^m=R^{m\cdot n+m}=R^{m(n+1)},$$

所以对一切 $m,n\in\mathbb{N}$，有 $(R^m)^n=R^{mn}$.

定理 4.2.8 设 R 为集合 A 上的二元关系，若存在自然数 $s,t(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$，则

(1) 对任何 $k\in\mathbb{N}$ 有 $R^{s+k}=R^{t+k}$；

(2) 对任何 $k,i\in\mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$；

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in\mathbb{N}$，有 $R^q\in S$.

证明 (1) 由关系复合定义知 $R^{s+k}=R^s\circ R^k$，由已知 $R^s=R^t$ 及复合定义，则有

$$R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}.$$

(2) 对 k 归纳.

若 $k=0$，则有

$$R^{s+0p+i}=R^{s+i}.$$

假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$，则

$$\begin{aligned}R^{s+(k+1)p+i}&=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^p\\&=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}\\&=R^{t+i}=R^{s+i}.\end{aligned}$$

由归纳法，命题得证.

(3) 任取 $q\in\mathbb{N}$，若 $q<t$，显然有 $R^q\in S$. 若 $q\geqslant t$，则存在自然数 k 和 i，使得

$$q=s+kp+i,$$

其中 $0\leqslant i\leqslant p-1$. 于是 $R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$. 而

$$s+i\leqslant s+p-1=s+t-s-1=t-1,$$

这就证明了 $R^q\in S$.

通过上面的定理我们可以看出，有限集合 A 上的关系 R 的各次幂序列 $R^0,R^1,R^2,\cdots$ 是一个周期性变化的序列. 利用它的周期性可以将 R 的高次幂化简为 R 的低次幂.

4.3 关系的性质

关系的性质主要有以下 5 种：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性. 下面给出关系的 5 种性质.

定义 4.3.1 设 R 为集合 A 上的关系.

(1) 若对任意 $x\in A$，都有 $\langle x,x\rangle\in R$，则称关系 R 在集合 A 上是自反的，即

$$R\text{ 是自反的}\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to\langle x,x\rangle\in R).$$

(2) 若对任意 $x\in A$，都有 $\langle x,x\rangle\notin R$，则称关系 R 在集合 A 上是反自反的，即

$$R\text{ 是自反的}\Leftrightarrow\forall x(x\in A\to\langle x,x\rangle\notin R).$$

例如集合 A 上的恒等关系 I_A，全域关系 E_A 都是集合 A 上的自反关系. 小于等于关系

L_A,整除关系 D_B 分别为集合 A 和集合 B 上的自反关系. 包含关系 $R_{\subseteq}$ 是给定集合族 A 上的自反关系,而真包含关系和小于关系都是给定集合族或集合上的反自反关系.

例 4.3.1 设 $A=\{2,3,4\}$,R_1,R_2 和 R_3 是集合 A 上的关系,其中

$$R_1=\{\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle\},$$
$$R_2=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle\},$$
$$R_3=\{\langle 4,3\rangle\},$$

说明 R_1,R_2 和 R_3 是否为集合 A 上的自反关系和反自反关系.

解 按照自反关系和反自反关系的定义知:R_2 是自反的,R_3 是反自反的,R_1 既不是自反的也不是反自反的.

定义 4.3.2 设 R 为集合 A 上的关系.

(1) 对于任意 $x,y\in A$,若 $\langle x,y\rangle\in R$ 时,就有 $\langle y,x\rangle\in R$,则称 R 为集合 A 上的**对称关系**,即

$$R\text{ 对称的}\Leftrightarrow\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R).$$

(2) 对于任意 $x,y\in A$,若 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,x\rangle\in R$ 时,就有 $x=y$,则称 R 为集合 A 上的**反对称关系**,即

$$R\text{ 反对称的}\Leftrightarrow\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y).$$

例如集合 A 上的恒等关系 I_A,全域关系 E_A 和空关系 $\varnothing$ 都是集合 A 上对称的关系. 而恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$ 也是集合 A 上反对称的关系,但全域关系 E_A 不一定是集合 A 上的反对称关系,除非集合 A 为单元素集或空集.

例 4.3.2 设 $A=\{2,3,4\}$,R_1,R_2,R_3 和 R_4 都是 A 上的关系. 其中

$$R_1=\{\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle\},\quad R_2=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\},\quad R_4=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}.$$

说明 R_1,R_2,R_3 和 R_4 是否为 A 上对称的和反对称的关系.

解 按照自反关系和反自反关系的定义知:R_1 既是对称的也是反对称的,R_2 是对称的但不是反对称的,R_3 是反对称的但不是对称的,R_4 既不是对称的也不是反对称的.

定义 4.3.3 设 R 为集合 A 上的关系,若对于任意 $x,y,z\in A$,当 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$ 时,就有 $\langle x,z\rangle\in R$,则称 R 为集合 A 上**传递的关系**,即

$$R\text{ 传递的}\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R).$$

例如 A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$ 都是 A 上的传递关系. 小于或等于关系、整除关系和包含关系也是相应集合上的传递关系. 小于关系和真包含关系仍旧是相应集合上的传递关系.

例 4.3.3 设 $A=\{2,3,4\}$,R_1,R_2 和 R_3 是集合 A 上的关系,其中

$$R_1=\{\langle 2,2\rangle,\langle 4,4\rangle\},\quad R_2=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,3\rangle\},\quad R_3=\{\langle 4,3\rangle\}.$$

说明 R_1,R_2 和 R_3 是否为 A 上的传递关系.

解 由传递关系定义知,关系 R_1 和 R_3 是集合 A 上的传递关系,而关系 R_2 不是集合 A 上的传递关系.

下面给出上述 5 种性质成立的充分必要条件.

定理 4.3.1 设 R 为集合 A 上的关系,则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A\subseteq R$;

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R\cap I_A=\varnothing$;

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R=R^{-1}$;

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$;

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R\circ R\subseteq R$.

证明 (1) 必要性. 任取 $\langle x,y\rangle$,由于 R 在 A 上是自反的,则必有

$$\langle x,y\rangle\in I_A\Rightarrow x,y\in A\wedge x=y\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R,$$

从而证明了 $I_A\subseteq R$.

充分性. 任取 x,有

$$x\in A\Rightarrow\langle x,x\rangle\in I_A\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R,$$

因此由自反定义知,关系 R 在集合 A 上是自反的.

(2) 必要性(用反证法). 假设 $R\cap I_A\neq\varnothing$,则必存在 $\langle x,y\rangle\in R\cap I_A$,由于 I_A 是集合 A 上的恒等关系,从而得出 $x\in A$ 且 $\langle x,x\rangle\in R$,这与 R 在集合 A 上是反自反的相矛盾.

充分性. 任取 x,则有

$$x\in A\Rightarrow\langle x,x\rangle\in I_A\Rightarrow\langle x,x\rangle\notin R(\text{由于 } R\cap I_A=\varnothing),$$

从而证明在集合 A 上 R 是反自反的.

(3) 必要性. 任取 $\langle x,y\rangle$,有

$$\langle x,y\rangle\in R\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R(\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上对称})\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R^{-1},$$

所以 $R=R^{-1}$.

充分性. 任取 $\langle x,y\rangle$,由 $R=R^{-1}$ 得

$$\langle x,y\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R^{-1}\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R$$

所以由对称关系的定义知,关系 R 在集合 A 上是对称的.

(4) 必要性. 任取 $\langle x,y\rangle$,有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\\&\Rightarrow x=y(\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是反对称的})\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in I_A,\end{aligned}$$

这就证明了 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$.

充分性. 任取 $\langle x,y\rangle$,则有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in I_A(\text{因为 } R\cap R^{-1}\subseteq I_A)\\&\Rightarrow x=y,\end{aligned}$$

从而根据反对称关系定义知,关系 R 在集合 A 上是反对称的.

(5) 必要性. 任取 $\langle x,y\rangle$,有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\circ R&\Rightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in R\wedge\langle t,y\rangle\in R)\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R(\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是传递的}),\end{aligned}$$

所以有 $R\circ R\subseteq R$.

充分性. 任取 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R$,则

$$\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\circ R$$
$$\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R(\text{因为 } R\circ R\subseteq R),$$

所以，根据传递关系定义知，关系 R 在集合 A 上是传递的.

利用定理 4.3.1，我们可以根据关系的集合表达式来判断或证明关系是否具有某种性质.

例 4.3.4 设 A 是集合，R_1 和 R_2 是 A 上的关系，证明：

(1) 若 R_1，R_2 是自反的和对称的，则 $R_1\cup R_2$ 也是自反的和对称的；

(2) 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1\cap R_2$ 也是传递的.

证明 (1) 由于 R_1 和 R_2 是集合 A 上的自反关系，则有

$$I_A\subseteq R_1 \text{ 且 } I_A\subseteq R_2,$$

从而，$I_A\subseteq R_1\cup R_2$. 根据定理 4.3.1 可知，$R_1\cup R_2$ 在集合 A 上是自反的.

由已知 R_1 和 R_2 的对称性有

$$R_1=R_1^{-1} \text{ 且 } R_2=R_2^{-1}$$

首先证明 $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$.

事实上，任取 $\langle x,y\rangle$，有

$$\langle x,y\rangle\in(R_1\cup R_2)^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\cup R_2$$
$$\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\vee\langle y,x\rangle\in R_2$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1^{-1}\vee\langle x,y\rangle\in R_2^{-1}$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1^{-1}\cup R_2^{-1},$$

即有 $$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}=R_1\cup R_2.$$

从而根据定理 4.3.1，关系 $R_1\cup R_2$ 也是集合 A 上对称的关系.

(2) 由已知 R_1 和 R_2 具有传递性，由定理 4.3.1 有

$$R_1\circ R_1\subseteq R_1 \text{ 且 } R_2\circ R_2\subseteq R_2.$$

由定理 4.2.4 有

$$(R_1\cap R_2)\circ(R_1\cap R_2)\subseteq R_1\circ R_1\cap R_1\circ R_2\cap R_2\circ R_1\cap R_2\circ R_2$$
$$\subseteq(R_1\cap R_2)\cap R_1\circ R_2\cap R_2\circ R_1(\text{将前面的包含式代入})$$
$$\subseteq R_1\cap R_2.$$

再结合定理 4.3.1 可知，关系 $R_1\cap R_2$ 也是集合 A 上的传递关系.

关系的性质不仅反映在它的集合表达式上，在关系矩阵和关系图上也具有一定的特点. 下面列出关系的 5 种性质在关系矩阵和关系图上的特点. 如表 4.3.1 所示.

表 4.3.1

性质 表示	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1\ (i\neq j)$，则 $r_{ji}=0$	在 $\boldsymbol{M}_R^2$ 中 1 所在的位置，$\boldsymbol{M}_R$ 中相应的位置也都是 1

续表

表示＼性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
关系图	每个顶点都有自环	每个顶点都没有自环	如果两个不同顶点之间有边，一定是方向相反的两条边(无单边)	如果两个不同顶点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

例 4.3.5 判断图 4.3.1 中关系的性质，并说明理由.

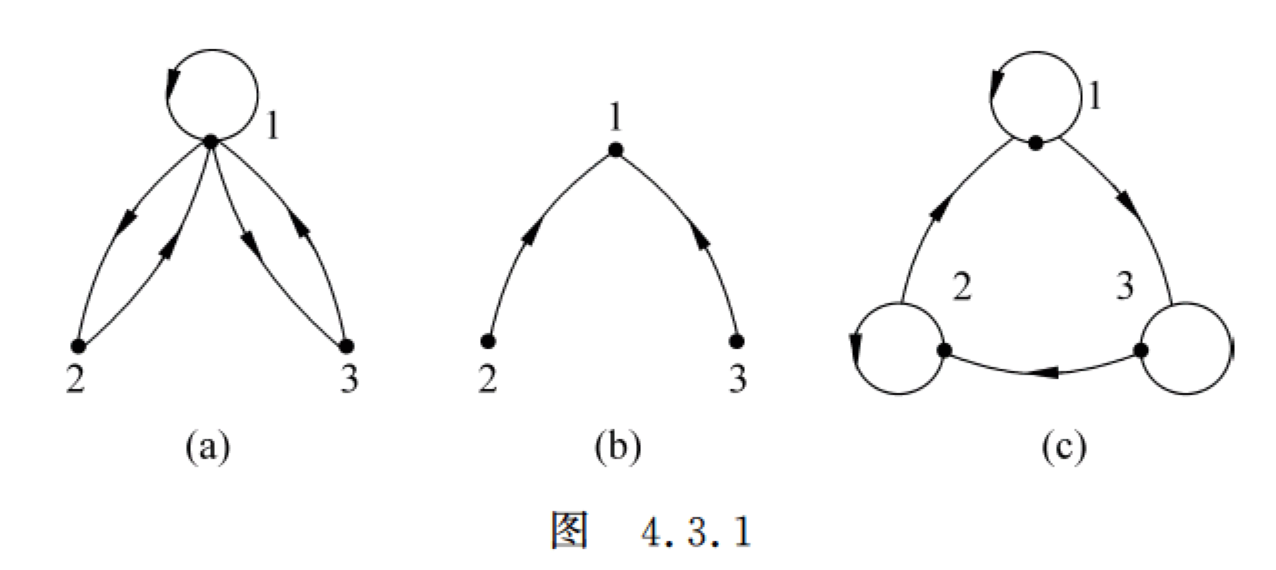


图 4.3.1

解 (a) 该关系是对称的，因为从关系图中可以看出无单向边. 它不是自反的也不是反自反的，因为有的顶点有自环，有的顶点没有自环. 它不是反对称的，因为图中含有双向边，它也不是传递的，因为图中有边〈3,1〉和〈1,3〉，但是没有边〈3,3〉，即通过顶点 3 的自环.

(b) 该关系是反自反的但不是自反的，因为从关系图中可以看出每个顶点都没有自环. 它是反对称的但不是对称的，因为图中任两个不同顶点间仅有单向边. 该关系是传递的，因为不存顶点 x,y,z，使得 x 到 y 有边，y 到 z 有边，但 x 到 z 没有边，其中 $x,y,z\in\{1,2,3\}$.

(c) 该关系是自反的但不是反自反的，因为从关系图中可以看出每个顶点都有环. 它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边. 但它不是传递的，因为 2 到 1 有边，1 到 3 有边，但 2 到 3 不存在边.

设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系，它们都具有某些共同的性质. 在经过并、交、相对补、求逆或右复合运算以后，所得到的新关系 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，R_1-R_2，R_1^{-1}，$R_1\circ R_2$ 等是否还能保持原来关系的性质呢？例 4.3.4 告诉我们：两个自反和对称的关系经过交运算后仍是传递的. 类似地，我们也可以考查其他的性质与运算之间的关系. 有关的结论列在表 4.3.2 中，其中 √ 和 × 分别表示“能保持”和“不一定保持”的意思.

表 4.3.2

运算原有性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1\cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1\cap R_2$	√	√	√	×	×
R_1-R_2	×	√	√	√	×
$R_1\circ R_2$	√	×	×	×	×

4.4 关系的闭包

设关系 R 是集合 A 上的关系，我们希望关系 R 具有某些有用的性质，比如对称性. 如果 R 不具有对称性，我们可以通过在关系 R 中添加一部分有序对来改造关系 R，得到新的关系 R'，使得 R' 具有对称性. 但是，我们希望 R' 与 R 相差的元素要尽可能的少. 满足这些要求的新的关系 R' 就称为 R 的对称闭包，通过添加有序对来构造的闭包除对称闭包外还有自反闭包和传递闭包. 具体定义如下。

定义 4.4.1 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 A 上的关系 R' 满足：

(1) R' 是自反的且 $R\subseteq R'$；

(2) 对 A 上的任意自反关系 R''，若 $R\subseteq R''$，则 $R'\subseteq R''$，那么，称关系 R' 是 R 的**自反闭包**，并记作 $r(R)$.

定义 4.4.2 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 A 上的关系 R' 满足：

(1) R' 是对称的且 $R\subseteq R'$；

(2) 对 A 上的任意对称关系 R''，若 $R\subseteq R''$，则 $R'\subseteq R''$，那么，称关系 R' 是 R 的**对称闭包**，并记作 $s(R)$.

定义 4.4.3 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 A 上的关系 R' 满足：

(1) R' 是传递的且 $R\subseteq R'$；

(2) 对 A 上的任意传递关系 R''，若 $R\subseteq R''$，则 $R'\subseteq R''$，那么，称关系 R' 是 R 的**传递闭包**，并记作 $t(R)$.

由上述定义可知，如果给定集合 A 上的二元关系，可以用增加有序对的方法得到它的自反闭包、对称闭包和传递闭包. 从定义中的(2)可以看出，$r(R)$ 是包含关系 R 且具有自反性的最小的关系，$s(R)$ 是包含关系 R 且具有对称性的最小的关系，$t(R)$ 是包含关系 R 且具有传递性的最小的关系.

下面的定理给出了构造闭包的方法.

定理 4.4.1 设 R 为集合 A 上的关系，则有：

(1) $r(R)=R\cup R^0$；

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$；

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$.

证明 (1) 由于 $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$，显然有关系 $R\cup R^0$ 是自反的且满足 $R\subseteq R\cup R^0$. 设 R'' 是集合 A 上的包含 R 的自反关系，即有 $R\subseteq R''$ 和 $I_A=R^0\subseteq R''$，从而有 $R\cup R^0\subseteq R''$. 由自反闭包定义，因而有 $R\cup R^0$ 是关系 R 的自反闭包，所以 $r(R)=R\cup R^0$.

(2) 由于 $(R\cup R^{-1})^{-1}=R^{-1}\cup R=R\cup R^{-1}$，由定理 4.3.1 知 $R\cup R^{-1}$ 是对称的，而且有 $R\subseteq R\cup R^{-1}$. 令关系 R'' 是集合 A 上具有对称性的任一关系，且 $R''\supseteq R$. 任取 $\langle x,y\rangle\in R^{-1}$，则必有 $\langle y,x\rangle\in R\subseteq R''$. 又由 R'' 具有对称性，从而 $\langle x,y\rangle\in R''$. 故有 $R^{-1}\subseteq R''$. 综上，$R^{-1}\cup R\subseteq R''$. 所以 $R^{-1}\cup R$ 是关系 R 的对称闭包，即 $s(R)=R\cup R^{-1}$.

(3) 首先证明 $R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\subseteq t(R)$. 用数学归纳法.

(a) 归纳基础：对 $n=1$，由传递闭包的定义知 $R\subseteq t(R)$.

(b) 归纳步骤：设 $n=k$ 时有 $R^k\subseteq t(R)$，当 $n=k+1$ 时，对任意 $\langle x,y\rangle\in R^{k+1}$，即存在

$z\in A$,使得$\langle x,z\rangle\in R^k$,$\langle z,y\rangle\in R$,但是由归纳假设知$R^k\subseteq t(R)$,故$\langle x,z\rangle\in t(R)$. 由归纳基础,$\langle z,y\rangle\in t(R)$,再由传递闭包$t(R)$的传递性知$\langle x,y\rangle\in t(R)$. 根据$\langle x,y\rangle$的任意性,故$R^k\subseteq t(R)$. 由此可知,对任意自然数$n$,$R^n\subseteq t(R)$. 所以有$R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\subseteq t(R)$.

其次证明$t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$. 对任意的$\langle x,y\rangle\in R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$和$\langle y,z\rangle\in R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$,必存在正整数$i$和$j$使得$\langle x,y\rangle\in R^i$和$\langle y,z\rangle\in R^j$.

由关系复合定义知$\langle x,z\rangle\in R^i\circ R^j=R^{i+j}$. 从而$\langle x,z\rangle\in R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$,即$R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$具有传递性. 由传递闭包定义,故有$t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$.

推论 设R为有限集合A上的关系,则存在正整数r使得

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^r.$$

定理 4.4.2 设R是集合A上的二元关系,则$R^{n+1}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$是$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$的充要条件.

证明 首先证明充分性. 事实上$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$,由已知$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$,从而$R^{n+1}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$.

其次证明必要性. 若$R^{n+1}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$,利用数学归纳法证明对任意自然数$k\geqslant n+1$,有$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i\ (k\geqslant n+1)$. 故有$R^{n+1}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$.

(1) 归纳基础:$k=n+1$,由假设条件知$R^{n+1}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$.

(2) 归纳步骤:设$k=m\,(m\geqslant n+1)$时,有$R^m\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$成立. 当$k=m+1$时,有$R^m\circ R\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}R^i\right)\circ R$,所以$R^{m+1}\subseteq\bigcup_{i=2}^{n+1}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$.

故对任意自然数$k\geqslant n+1$,有$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$,当$k=1,2,\cdots,n$时,有$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$. 故有$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$.

由定理 4.2.6 及定理 4.4.1 显然结论成立.

例 4.4.1 设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$,R是集合A上的二元关系,$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,3\rangle\}$,求$r(R)$,$s(R)$,$t(R)$.

解
$$\begin{aligned}r(R)&=R\cup I_A\\&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\\&\quad\ \langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(R)&=R\cup R^{-1}\\&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 6,4\rangle\}.\end{aligned}$$

下面计算传递闭包.

$$\begin{aligned}R&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,3\rangle\},\\R^2&=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,1\rangle\},\\R^3&=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 5,2\rangle\},\\R^4&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle\},\\R^5&=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,1\rangle\}.\end{aligned}$$

由于 $R^5=R^2$,故 $R^i(i>5)$不需要计算了. 从而由定理 4.4.1 知

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$$
$$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,1\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}.$$

此外,也可以利用关系矩阵的合成运算来求关系的传递闭包.

例 4.4.2 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,R 是集合 A 上的二元关系,$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle\}$,求 $t(R)$.

解 由于 $R^4=R^2$,故有 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3$. 由关系矩阵定义知

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

关系 R^2 及 R^3 的关系矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}_{R^2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{M}_{R^4}=\boldsymbol{M}_{R^2}$. 故有

$$\boldsymbol{M}_{t(R)}=\boldsymbol{M}_R\vee\boldsymbol{M}_{R^2}\vee\boldsymbol{M}_{R^3}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle\}$.

为了计算关系 R 的传递闭包,1962 年 Warshall 证明了一个有效的算法,其计算过程如下:

(1) 置新矩阵 $\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{M}_R$;

(2) 置 $i=1$;

(3) 对所有 j,如果 $A[j,i]=1$,则对 $k=1,2,\cdots,n$,$A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]$;

(4) $i+1$;

(5) 如果 $i\leqslant n$,则转到步骤(3),否则停止.

注意：这里 $A[j,i]$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 行第 i 列交叉处的元素，其中“+”表示取“最大”. 运算 $A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]$ 表示将第 j 行 k 列交叉处的元素和第 i 行 k 列处的元素进行“逻辑加”运算后，代替 j 行 k 列交叉处的值.

例 4.4.3 利用 Warshall 算法计算例 4.4.2 中关系 R 的传递闭包.

解 已知关系 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

根据 Warshall 算法中的步骤(1)，我们有 $\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{M}_R$.

当 $i=1$ 时，第一列中 $A[2,1]=1$，根据步骤(3)，我们有 $j=2,i=1$. 故将第一行中的各元素与第二行中各对应元素作“逻辑加”运算，所得结果分别记入第二行，然后将 i 加 1.

当 $i=2$ 时，由于 $2\leqslant 5$，所以，继续执行步骤(3). 此时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为下面的矩阵：

$$\boldsymbol{M}_A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

执行(3)时，满足 $A[j,2]=1$ 的有 $j=1$ 和 $j=2$. 故将第二行各元素与第一行各对应元素做“逻辑加”运算后，将所得结果记入第一行. 再将第二行各元素自己同自己做“逻辑加”运算. 执行的结果将 $\boldsymbol{M}_A$ 变为

$$\boldsymbol{M}_A=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

i 加 1 后得 $i=3$，于是在执行步骤(3). 此时，第三列中有 $A[1,3]$ 和 $A[2,3]$ 为 1，于是分别将第三行各元素与第一行和第二行各元素做“逻辑加”运算. 于是可得

$$\boldsymbol{M}_A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

当 $i=4$ 时，由于第四行中各元素均为零，此时 $A[1,4]=1,A[2,4]=1,A[3,4]=1$，在进行“逻辑加”运算后各行元素均不变. 执行完后 i 加 1，故 $i=5$.

当 $i=5$ 时，同 $i=4$. 执行后 i 加 1，得 $i=6$.

当 $i=6$ 时停止.

综上，$t(R)=\boldsymbol{M}_A$.

下面的定理给出了闭包的主要性质.

定理 4.4.3 设 R 是非空集合 A 上的关系,则:

(1) R 是自反的当且仅当 $r(R)=R$;

(2) R 是对称的当且仅当 $s(R)=R$;

(3) R 是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

证明 只证明(1),其余留作练习.

由自反闭包定义,显然有 $R\subseteq r(R)$;下面证明 $r(R)\subseteq R$. 由于 R 是包含了 R 的自反关系,根据自反闭包定义有 $r(R)\subseteq R$. 从而得到 $r(R)=R$.

定理 4.4.4 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系,且 $R_1\subseteq R_2$,则:

(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$.

证明留作练习.

关系 R 具有某种性质,例如自反性、对称性或传递性,那么它的闭包是否也具有某种性质呢,下面讨论这个问题.

定理 4.4.5 设 R 是非空集合 A 上的关系.

(1) 若 R 是自反的,则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的.

(2) 若 R 是对称的,则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的.

(3) 若 R 是传递的,则 $r(R)$ 是传递的.

证明 (1) 由已知 R 是自反的,则对任意的 $x\in A$,有 $\langle x,x\rangle\in R$,由 $s(R)$ 和 $t(R)$ 的定义,$R\subseteq s(R)$,$R\subseteq t(R)$,所以有 $\langle x,x\rangle\in s(R)$ 和 $\langle x,x\rangle\in t(R)$. 从而,$s(R)$ 与 $t(R)$ 都是自反的.

(2) 由于 R 是 A 上的对称关系,所以 $R=R^{-1}$,同时 $I_A=I_A^{-1}$. 根据例 4.3.4 得

$$(R\cup I_A)^{-1}=R^{-1}\cup I_A^{-1}.$$

从而推出

$$r(R)^{-1}=(R\cup I_A)^{-1}=(R\cup I_A^{-1})=R^{-1}\cup I_A^{-1}=R\cup I_A=r(R).$$

这就证明了 $r(R)$ 是对称的.

为证明 $t(R)$ 是对称的,先证明下面命题:

若 R 是对称的,则 R^n 也是对称的,其中 n 是任何正整数.

用归纳法证明.

当 $n=1$ 时,$R^1=R$ 显然是对称的.

假设 R^n 是对称的,则对任意的 $\langle x,y\rangle$,有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R^{n+1}&\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in R^n\wedge\langle t,y\rangle\in R)\\&\Rightarrow \exists t(\langle t,x\rangle\in R^n\wedge\langle y,t\rangle\in R)\\&\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\circ R^n\\&\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R^{1+n}=R^{n+1},\end{aligned}$$

所以 R^{n+1} 是对称的. 由归纳法,命题得证.

下面证明 $t(R)$ 的对称性.

任取$\langle x,y\rangle$,则

$$\langle x,y\rangle\in t(R)\Rightarrow\exists n(\langle x,y\rangle\in R^n)$$
$$\Rightarrow\exists n(\langle y,x\rangle\in R^n)(\text{因为 } R^n \text{ 是对称的})$$
$$\Rightarrow\langle y,x\rangle\in t(R).$$

从而证明了$t(R)$的对称性.

(3) 由于$r(R)=R\cup I_A$,

$$r(R)\circ r(R)=(R\cup I_A)\circ(R\cup I_A)=R\circ R\cup I_A\circ R\cup R\circ I_A\circ I_A.$$

根据定理4.3.1中(5),R具有传递性,有$R\circ R\subseteq R$,从而

$$r(R)\circ r(R)\subseteq R\cup I_A\subseteq r(R).$$

从而$r(R)$具有传递性.

定理4.4.5讨论了关系性质和闭包运算之间的联系.如果关系R是自反的或对称的,那么求闭包运算以后所得到的关系仍是自反或对称的.但是对于传递的关系则不然.它的自反闭包仍就保持传递性,而对称闭包就有可能失去传递性,例如$A=\{1,2,3\}$,$R=\{\langle 1,3\rangle\}$是A上的传递关系,R的对称闭包

$$s(R)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}.$$

显然$s(R)$不再是A上的传递关系.

关系的闭包运算得到了新的关系,当然可以再进行闭包运算,那么对关系进行闭包运算与先后顺序是否有关系?下面研究闭包嵌套运算.

定理4.4.6 设R是集合A中的关系,于是有:

(1) $rs(R)=sr(R)$;

(2) $rt(R)=tr(R)$;

(3) $ts(R)\supseteq st(R)$.

证明 令I_A表示集合A上的恒等关系,于是有:

(1) $rs(R)=r(R\cup R^{-1})=R\cup R^{-1}\cup I_A=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R^{-1})$.

由例4.3.4,我们有

$$rs(R)=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^{-1}=s(I_A\cup R)=sr(R).$$

(2) 首先证明$rt(R)\subseteq tr(R)$.

由自反闭包定义,有$R\subseteq r(R)$.由定理4.4.4有$t(R)\subseteq tr(R)$,进一步有$rt(R)\subseteq rtr(R)$.由定理4.4.5知$tr(R)$具有自反性,结合定理4.4.3有$rtr(R)=tr(R)$,即有$rt(R)\subseteq tr(R)$.

其次证明$tr(R)\subseteq rt(R)$.

由传递闭包定义,显然有$R\subseteq t(R)$,由定理4.4.4有$r(R)\subseteq rt(R)$,进一步有$tr(R)\subseteq trt(R)$.由定理4.4.5知$rt(R)$具有传递性,结合定理4.4.3有$trt(R)=rt(R)$,即有$tr(R)\subseteq rt(R)$.

(3) 由对称闭包定义,有$R\subseteq s(R)$,所以有$t(R)\subseteq ts(R)$.由定理4.4.4有$st(R)\subseteq sts(R)$.由定理4.4.5知$ts(R)$具有对称性,结合定理4.4.3有$sts(R)=ts(R)$,即$st(R)\subseteq ts(R)$.

注 $ts(R)\neq st(R)$.例如:设$A=\{a,b,c\}$,$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle\}$,则:

$$s(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle\},$$
$$ts(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle\},$$
$$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle\}=R,$$
$$st(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}.$$

显然有 $ts(R)\neq st(R)$，但是 $st(R)\subseteq ts(R)$.

4.5 等价关系与偏序关系

等价关系与偏序关系是两类重要的二元关系，本节研究这两类关系.

定义 4.5.1 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的**等价关系**. 设 R 是一个等价关系，若 $\langle x,y\rangle\in R$，称 x 等价于 y，记作 $x\sim y$.

例 4.5.1 设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$，R 为集合 A 上的二元关系，且定义如下：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y(\text{mod } 3)\},$$

其中 $x\equiv y(\text{mod } 3)$称为 x 与 y 模 3 相等，即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等. 不难验证 R 为集合 A 上的等价关系，事实上有

$\forall x\in A$，有 $x\equiv y(\text{mod } 3)$.

$\forall x,y\in A$，若 $x\equiv y(\text{mod } 3)$，则有 $y\equiv x(\text{mod } 3)$.

$\forall x,y,z\in A$，若 $x\equiv y(\text{mod } 3)$，$y\equiv z(\text{mod } 3)$，则有 $x\equiv z(\text{mod } 3)$.

该关系的关系图如图 4.5.1 所示.

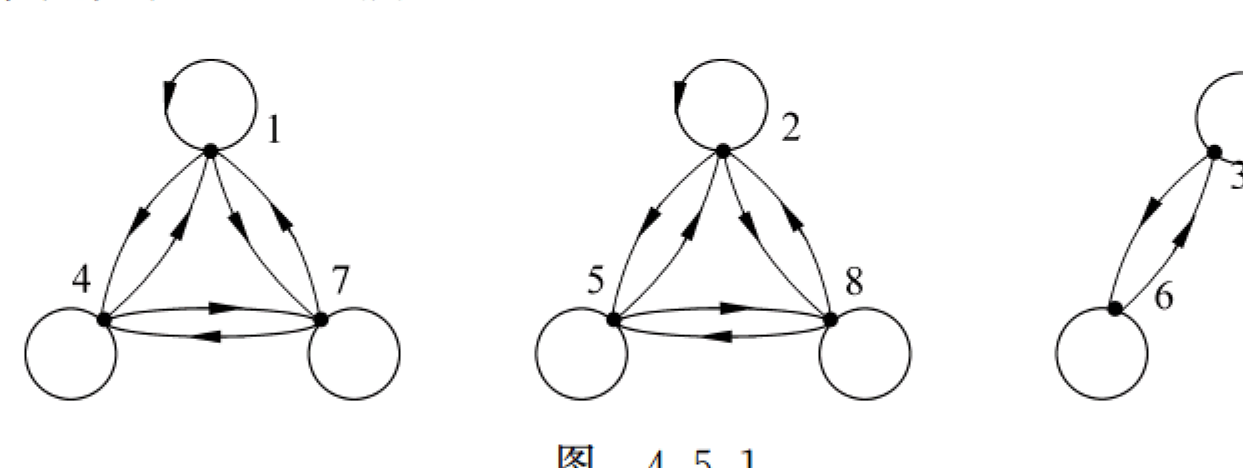


图 4.5.1

不难看到，上述关系图被分为三个互相不连通的部分，每部分中的数两两都有关系，不同部分中的数则没有关系. 每一部分中的所有的顶点构成一个等价类.

定义 4.5.2 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，$\forall x\in A$，定义

$$[x]_R=\{y \mid y\in A\wedge xRy\}.$$

称$[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的**等价类**，简记为$[x]$或 $\bar{x}$.

从定义可以看出，x 的等价类是集合 A 中所有与 x 等价的元素构成的集合. 例 4.5.1 中的等价类为

$$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\},\quad [2]=[5]=[8]=\{2,5,8\},\quad [3]=[6]=\{3,6\}.$$

将例 4.5.1 中的模 3 等价关系加以推广，可以得到整数集合$\mathbb{Z}$上的模 n 等价关系.

设 x 是任意整数，n 为给定的正整数，则存在唯一的整数 q 和 r，使得

$$x=qn+r,$$

其中 $0\leqslant r\leqslant n-1$，称 r 为 x 除以 n 的余数. 例如 $n=3$，那么 -8 除以 3 的余数为 1，因为

$$-8=-3\times 3+1.$$

对于任意的整数 x 和 y，定义模 n 相等的关系～：

$$x\sim y \Leftrightarrow x\equiv y \pmod n.$$

不难验证上述定义的关系是整数集合 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系. 将 $\mathbb{Z}$ 中的所有整数根据它们除以 n 的余数分类如下：

余数为 0 的数，其形式为 $nz, z\in\mathbb{Z}^+$；

余数为 1 的数，其形式为 $nz+1, z\in\mathbb{Z}$；

……

余数为 $n-1$ 的数，其形式为 $nz+n-1, z\in\mathbb{Z}$.

以上构成了 n 个等价类，使用等价类的符号可记为

$$[i]=\{nz+i \mid z\in\mathbb{Z}\},\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

下面的定理给出了等价类的性质.

定理 4.5.1 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，则：

(1) $\forall x\in A$，$[x]$ 是 A 的非空子集；

(2) $\forall x,y\in A$，如果 xRy，则 $[x]=[y]$；

(3) $\forall x,y\in A$，如果 $x\not R y$，则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交；

(4) $\bigcup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

证明 (1) 由等价类的定义可知，$\forall x\in A$ 有 $[x]\subseteq A$. 又由等价关系的自反性有 $x\in[x]$，即 $[x]$ 是非空集合.

(2) 首先证明 $[x]\subseteq[y]$. 任取 $z\in[x]$，由 $[x]$ 定义知 $\langle x,z\rangle\in R$，由 R 具有对称性，故有 $\langle z,x\rangle\in R$. 已知 xRy，即 $\langle x,y\rangle\in R$. 因为 R 具有传递性，从而有 $\langle y,z\rangle\in R$. 从而证明了 $z\in[y]$. 综合上述，必有 $[x]\subseteq[y]$. 同理可证 $[y]\subseteq[x]$. 这就得到了 $[x]=[y]$.

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在 $z\in[x]\cap[y]$，从而有 $z\in[x]\wedge z\in[y]$，即 $\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R$ 成立. 根据 R 的对称性和传递性必有 $\langle x,y\rangle\in R$，这与 $x\not R y$ 矛盾，即假设不成立，故有 $[x]$ 与 $[y]$ 不交.

(4) 首先证明 $\bigcup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$.

任取 $y\in\bigcup\{[x]\mid x\in A\}$，则 $\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$. 因为 $[x]\subseteq A$，从而有 $y\in A$. 故 $\bigcup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$.

其次证明 $A\subseteq\bigcup\{[x]\mid x\in A\}$.

任取 $y\in A$，则 $y\in[y]$ 且 $y\in A$. 故有 $y\in\bigcup\{[x]\mid x\in A\}$. 从而有 $A\subseteq\bigcup\{[x]\mid x\in A\}$ 成立.

综合可得 $\bigcup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

非空集合 A 和 A 上的等价关系 R 可以定义一个新的集合——商集.

定义 4.5.3 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**，记作 A/R，即

$$A/R=\{[x]_R\mid x\in A\}.$$

例 4.5.1 中的商集为 $\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$. 而整数集合 $\mathbb{Z}$ 上模 n 等价关系的商集是

$$\{\{nz+i\mid z\in Z\}\mid i=0,1,\cdots,n-1\}.$$

与等价关系和商集有密切联系的概念是集合的划分. 先给出划分的定义.

定义 4.5.4　设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π（$\pi\subseteq P(A)$，是 A 的子集构成的集合）满足下面的条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$；

(2) $\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$；

(3) $\bigcup\pi=A$，则称是 A 的一个**划分**，称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

例 4.5.2　设 $A=\{a,b,c,d\}$，给定 $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$ 如下：

$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$，　$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$，　$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$，

$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$；　$\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$；　$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$.

则 π_1 与 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分. 因为 π_3 中的子集 $\{a\}$ 和 $\{a,b,c,d\}$ 有交，$\bigcup\pi_4\neq A$，π_5 中含有空集，而 π_6 根本不是 A 的子集族.

把商集 A/R 和划分的定义相比较，易见商集就是 A 的一个划分，并且不同的商集将对应于不同的划分. 反之，任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R：

$$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x\text{ 与 }y\text{ 在 }\pi\text{ 的同一划分块中}\}.$$

则不难证明 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π. 由此可见，A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

例 4.5.3　给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系.

解　如图 4.5.2，先做出 A 的所有划分.

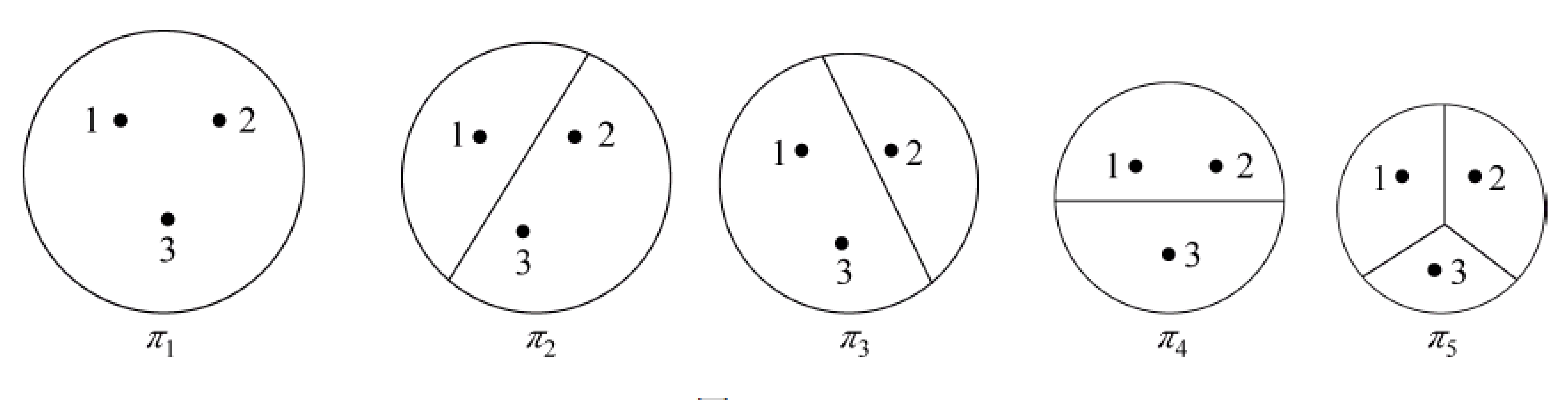


图　4.5.2

这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应是：π_1 对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A，π_2,π_3 和 π_4 分别对应于等价关系 R_2,R_3 和 R_4，其中

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A,$$
$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A,$$
$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A.$$

下面介绍另一种重要关系——偏序关系.

定义 4.5.5　设 R 为非空集合 A 上的关系. 如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为集合 A 上的**偏序关系**，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系，如果 $\langle x,y\rangle\in\preccurlyeq$，则记作 $x\preccurlyeq y$，读作 x“小于或等于”y.

注意这里的小于或等于不是数的大小，而是在偏序关系中的顺序性. x“小于或等于”y 的含义是：依照这个序，x 排在 y 前边或者 x 就是 y. 根据不同偏序的定义，对序有着不同的解释. 例如整除关系就是偏序关系$\preccurlyeq$，$3\preccurlyeq 6$ 的含义就是 3 整除 6. 大于或等于关系也是偏序关系，针对这个关系写 $5\preccurlyeq 4$ 是说在大于或等于关系中 5 排在 4 前面，也就是说 5 比 4 大.

例如集合 A 上的恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$ 都是 A 上的偏序关系. 小于或等于关系、整除

关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系. 一般说来，全域关系 E_A 不是 A 上的偏序关系.

定义 4.5.6 设"≤"为非空集合 A 上的偏序关系，定义：

(1) $\forall x,y\in A, x\prec y \Leftrightarrow x\leqslant y \wedge x\neq y$;

(2) $\forall x,y\in A$, x 与 y 可比$\Leftrightarrow x\leqslant y \vee y\leqslant x$.

其中 $x\prec y$ 读作 x"小于"y. 这里所说的小于是指在偏序关系中 x 排在 y 前边.

由以上两个定义可知，在具有偏序关系的集合 A 中任取两个元素 x 和 y，可能有下述几种情况发生：$x\prec y$（或 $y\prec x$），$x=y$，x 与 y 不是可比的.

例如 $A=\{1,2,3\}$，≤是 A 上的整除关系，则有 $1\prec 2$，$1\prec 3$，$1=1$，$2=2$，$3=3$，2 与 3 不可比.

定义 4.5.7 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，如果 $\forall x,y\in A$，x 与 y 都是可比的，则称 R 为 A 上的**全序关系**（或**线序关系**）.

例如数集上的小于或等于关系是全序关系，因为任何两个数总是可比较大小的. 但整除关系一般说来不是全序关系，例如集合$\{1,2,3\}$上的整除关系就不是全序关系，因为 2 和 3 不可比.

定义 4.5.8 集合 A 和 A 上的偏序关系≤一起构成**偏序集**，记作$\langle A,\leqslant\rangle$.

例如整数集合$\mathbb{Z}$和数的小于或等于关系≤构成偏序集$\langle \mathbb{Z},\leqslant\rangle$，集合 A 的幂集 $P(A)$和包含关系$\subseteq$构成偏序集$\langle P(A),\subseteq\rangle$.

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性可以简化一个偏序关系的关系图，即省略自反边、传递边、箭头得到偏序集的哈斯图. 为了说明哈斯图的画法，首先定义偏序集中顶点的覆盖关系.

定义 4.5.9 设$\langle A,\leqslant\rangle$是偏序集，$\forall x,y\in A$，如果 $x\prec y$，且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$，则称 y **覆盖** x.

例如$\{1,2,4,6\}$集合上的整除关系，有 2 覆盖 1，但 4 不覆盖 1，因为有 $1\prec 2\prec 4$，6 也不覆盖 4，因为 $4\prec 6$ 不成立.

在画偏序集$\langle A,\leqslant\rangle$的哈斯图时，首先适当排列顶点的顺序使得：$\forall x,y\in A$，若 $x\prec y$，则将 x 画在 y 下方. 对于 A 中的两个元素 x 和 y，如果 y 覆盖 x，就用一条线段连接 x 和 y. 用位置的高低来表示元素间先后关系，即省略箭头.

例 4.5.4 画出偏序集$\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},R_{整除}\rangle$和$\langle P(\{a,b,c\}),\subseteq\rangle$的哈斯图.

解 两个哈斯图如图 4.5.3 所示.

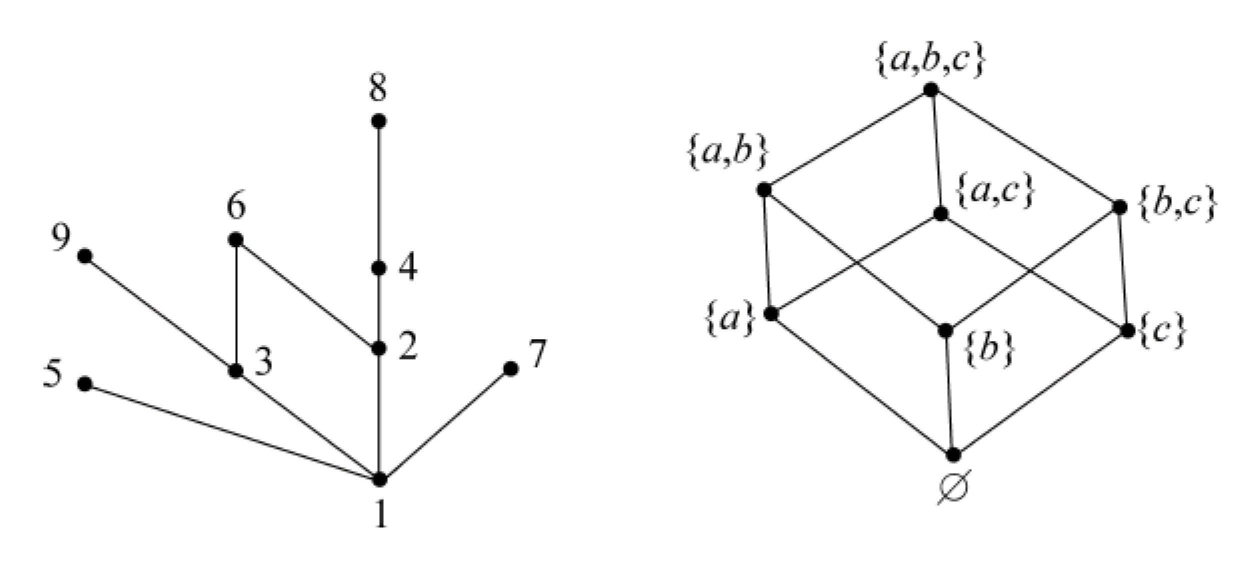


图 4.5.3

例 4.5.5　已知偏序集$\langle A,R\rangle$的哈斯图如图 4.5.4 所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

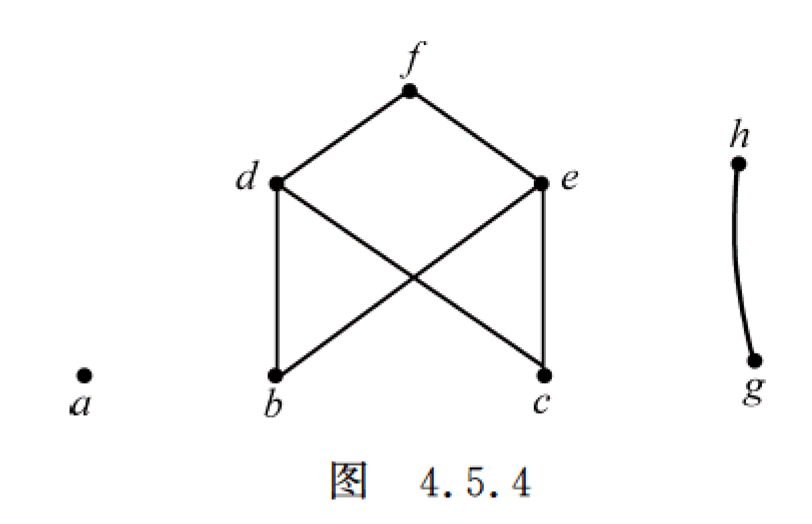


图　4.5.4

$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$R=\{\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle\}\cup I_A$.

下面考虑偏序集中的一些特殊元素.

定义 4.5.10　设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\leqslant x)$成立，则称 y 为 B 的**最小元**.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\leqslant y)$成立，则称 y 为 B 的**最大元**.

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\leqslant y\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的**极小元**.

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\leqslant x\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的**极大元**.

从以上定义可以看出，最小元与极小元是不一样的，最小元是 B 中的最小元素，它与 B 中其他元素都可比；而极小元不一定与 B 中元素都可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元. 对于有限集 B，极小元一定存在，但最小元不一定存在. 最小元如果存在，一定是唯一的，但极小元可能有多个. 如果 B 中只有一个极小元，则它一定是 B 中的最小元. 类似地，极大元与最大元也有这种区别.

例 4.5.6　设 X 为集合，$A=(P(X)-\{\varnothing\})-\{X\}$，且 $A\neq\varnothing$. 若$|X|=n$，问：

(1) 偏序集$\langle A,\subseteq\rangle$是否存在最大元？

(2)偏序集$\langle A,\subseteq\rangle$是否存在最小元？

(3)偏序集$\langle A,\subseteq\rangle$中的极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由.

解　$\langle A,\subseteq\rangle$不存在极小元和最大元，因为 $n\geqslant 2$.

考查幂集的哈斯图，最底层的顶点是空集，记作第 0 层. 由底向上，第 1 层是单元集，第 2 层是二元子集，……由$|X|=n$，则第 $n-1$ 层是 X 的 $n-1$ 元子集，第 n 层，也就是最高层只有一个顶点 X. 偏序集$\langle A,\subseteq\rangle$与$\langle P(X),\subseteq\rangle$相比，恰好缺少第 0 层与第 n 层(因为 X 是 n 元集)，因此$\langle A,\subseteq\rangle$的极小元就是 X 的所有单元集，即$\{x\}$，$x\in X$；而极大元恰好比 X 少一个元素，即 $X-\{x\}$，$x\in X$.

定义 4.5.11　设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in A$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\leqslant y)$成立，则称 y 为 B 的**上界**.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\leqslant x)$成立，则称 y 为 B 的**下界**.

(3) 令 $C=\{y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的**最小上界**或**上确界**.

(4) 令 $D=\{y|y$为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的**最大下界**或**下确界**.

由以上定义可知，B 的最小元一定是 B 的下界，同时也是 B 的最大下界. 同样地，B 的最大元一定是 B 的上界，同时也是 B 的最小上界. 但反过来不一定正确，B 的下界不一定是

B 的最小元,因为它可能不是 B 中的元素.同样的,B 的上界也不一定是 B 的最大元.

B 的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在.如果存在,最小上界与最大下界是唯一的.

考虑图 4.5.4 中的偏序集,令 $B=\{b,c,d\}$,则 B 的下界和最大下界都不存在,上界有 d 和 f,最小上界为 d.

4.6 函数的定义和性质

函数是一种特殊的二元关系,本节从关系角度研究函数.

定义 4.6.1 设 F 为二元关系,若 $\forall x\in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立,则称 F 为**函数**.对于函数 F,如果有 xFy,则记作 $y=F(x)$,并称 y 为 F 在 x 的值.

例 4.6.1 设

$$F_1=\{\langle x_1,y\rangle,\langle x_2,y_1\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\},\quad F_2=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_2\rangle\},$$

判断它们是否为函数.

解 F_1 是函数,F_2不是函数,因为对应于 x_1 存在和 y_1 和 y_2 满足 $x_1F_2y_1$ 和 $x_1F_2y_2$,与函数定义矛盾.

由于函数是集合,可以用集合相等来定义函数的相等.

定义 4.6.2 设 F,G 为函数,则

$$F=G\Leftrightarrow F\subseteq G\wedge G\subseteq F.$$

由以上定义可知,如果两个函数 F 和 G 相等,一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$;

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ 都有 $F(x)=G(x)$.

例如,函数 $F(x)=\dfrac{-1+x^2}{x+1}$,$G(x)=x-1$,是不相等的.因为 $\mathrm{dom}F=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge x\neq -1\}$,而 $\mathrm{dom}G=\mathbb{R}$,$\mathrm{dom}F\neq \mathrm{dom}G$.

定义 4.6.3 设 A,B 为集合,如果 f 为函数,且 $\mathrm{dom}f=A$,$\mathrm{ran}f\subseteq B$,则称 f 为从 A 到 B 的**函数**,记作 $f:A\to B$.

例如,$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$,$f(x)=2x$ 是从$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的函数,$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$,$g(x)=2$ 也是从$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的函数.

定义 4.6.4 所有从 A 到 B 的函数集合记作 B^A,读作 B 上 A,符号化表示为

$$B^A=\{f\mid f:A\to B\}.$$

例 4.6.2 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{1,2\}$,求 B^A.

解 $B^A=\{f_0,f_2,\cdots,f_7\}$,其中

$$f_0=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\},$$
$$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\},$$
$$f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\},$$
$$f_3=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\},$$
$$f_4=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\},$$
$$f_5=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\},$$
$$f_6=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\},$$
$$f_7=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}.$$

由排列组合的知识不难证明：若 $|A|=m,|B|=n$，且 $m,n>0$，则 $|B^A|=n^m$，在例 4.6.2 中，$|A|=3,|B|=2$，而 $|B^A|=2^3=8$.

当 A 或 B 中至少有一个集合是空集时，可以分成下面三种情况：

(1) $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$，则 $B^A=\varnothing^\varnothing=\{\varnothing\}$.

(2) $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$，则 $B^A=B^\varnothing=\{\varnothing\}$.

(3) $A\neq\varnothing$ 且 $B=\varnothing$，则 $B^A\neq\varnothing^A=\varnothing$.

定义 4.6.5　设函数 $f:A\to B,A_1\subseteq A,B_1\subseteq B$.

(1) 令 $f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$，则 $f(A_1)$ 为 A_1 在 f 下的像，特别地，当 $A_1=A$ 时称 $f(A)$ 为**函数的像**.

(2) 令 $f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$，称 $f^{-1}(B_1)$ 为 B_1 在 f 下的**完全原像**.

注意区别函数的值和像两个不同的概念. 函数值 $f(x)\in B$，而像 $f(A_1)\subseteq B$.

设 $B_1\subseteq B$，显然 B_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1)$ 是 A 子集. 考虑 $A_1\subseteq A$，那么 $f(A_1)\subseteq B$ 的完全映像就是 $f^{-1}(f(A_1))$. 一般来说 $f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$，但是 $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$. 例如函数 $f:\{1,2,3\}\to\{0,1\}$，满足

$$f(1)=f(2)=0,f(3)=1.$$

令 $A_1=\{1\}$，那么有

$$f^{-1}(f(A_1))=f^{-1}(f(\{1\}))=f^{-1}(\{0\})=\{1,2\}.$$

这时 $A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

例 4.6.3　设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 若 x 为偶数,\\ x+1, & 若 x 为奇数.\end{cases}$$

令 $A=\{0,1\},B=\{2\}$，那么有

$$f(A)=f(\{0,1\})=\{f(0),f(1)\}=\{0,2\},$$
$$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{2\})=\{1,4\}.$$

下面讨论函数的性质.

定义 4.6.6　设 $f:A\to B$.

(1) 若 $\mathrm{ran}f=B$，则称 $f:A\to B$ 是**满射**的.

(2) 若 $\forall y\in\mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 $f:A\to B$ 是**单射**的.

(3) 若 $f:A\to B$ 既是满射又是单射的，则称 $f:A\to B$ 是**双射的**(或**一一映像**).

由定义不难看出，如果 $f:A\to B$ 是满射的，则对于任意的 $y\in B$ 都存在 $x\in A$，使得 $f(x)=y$，如果 $f(x)=y$ 是单射的，则对于 $x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 换句话说，如果对于 $x_1\in A,x_2\in A$ 有 $f(x_1)=f(x_2)$，则一定有 $x_1=x_2$.

例 4.6.4　判断下列函数是否为单射、满射、双射的. 为什么?

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=-x^2+2x-1$.

(2) $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R},f(x)=\ln x$，$\mathbb{Z}^+$ 为正整数集.

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z},f(x)=|x|$.

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=2x+1$.

(5) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$，其中 $\mathbb{R}^+$ 为正实数集.

解 (1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$ 是开口向下的抛物线，不是单调函数，并且在点 $x=1$ 取得最大值 0. 因此它既不是单射也不是满射的.

(2) $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ 是单调上升的，因此是单射，但不是满射的，因为 $\operatorname{ran} f=\{\ln 1,\ln 2,\cdots\}\subset\mathbb{R}$.

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}, f(x)=\lfloor x\rfloor$ 是满射的，但不是单射的，例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$ 是单射、满射、双射的. 因为它是单调函数且 $\operatorname{ran} f=\mathbb{R}$.

(5) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+, f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ 不是单射也不是满射的，当 $x\to 0, f(x)\to+\infty$；而当 $x\to+\infty, f(x)\to+\infty$. 在 $x=1$ 处函数取得最小值 $f(1)=2$. 所以该函数既不是单射也不是满射的.

例 4.6.5 对于以下各题给定的 A, B 和 f，判断是否构成函数 $f:A\to B$. 如果是，说明 $f:A\to B$ 是否为单射、满射和双射的. 并根据要求进行计算.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{6,7,8,9,10\}, f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,9\rangle\}$.

(2) A, B 同(1) $f=\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 1,9\rangle\langle 5,10\rangle\}$.

(3) A, B 同(1) $f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,9\rangle\}$.

(4) $A=B=\mathbb{R}, f(x)=x^3\ (\forall x\in\mathbb{R})$.

(5) $A=B=\mathbb{R}^+, f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ (\forall x\in\mathbb{R}^+)$.

(6) $A=B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}, f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$. 令 $L=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in R\wedge y=x+1\}$，计算 $f(L)$.

(7) $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}, B=\mathbb{N}, f(\langle x,y\rangle)=|x^2-y^2|$，计算 $f(\mathbb{N}\times\{0\}, f^{-1}\{0\})$.

解 (1) 能构成 $f:A\to B$，但 $f:A\to B$ 既不是单射也不满射的. 因为 $f(3)=f(5)=9, 7\notin\operatorname{ran} f$.

(2) 不能构成 $f:A\to B$，因为 f 不是函数，$\langle 1,7\rangle\in f,\langle 1,9\rangle\in f$，与函数的定义矛盾.

(3) 不能构成 $f:A\to B$，因为 $\operatorname{dom} f=\{1,2,3,4\}\neq A$.

(4) 能构成 $f:A\to B$，且 $f:A\to B$ 是双射的.

(5) 能构成 $f:A\to B$，但 $f:A\to B$ 既不是单射也不是满射的. 因为该函数在 $x=1$ 取得极大值 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，函数不是单调的，且 $\operatorname{ran} f\neq\mathbb{R}^+$.

(6) 能构成 $f:A\to B$，且 $f:A\to B$ 是双射的.

$$f(L)=\{\langle 2x+1,-1\rangle\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\times\{-1\}.$$

(7) 能构成 $f:A\to B$，$f:A\to B$ 既不是单射也不是满射的. 因为 $f(\langle 1,1\rangle)=f(\langle 2,2\rangle)=0$，且 $2\notin\operatorname{ran} f$.

$$f(\mathbb{N}\times\{0\})=\{n^2-0^2\mid n\in\mathbb{N}\}=\{n^2\mid n\in\mathbb{N}\},$$
$$f^{-1}(\{0\})=\{\langle n,n\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}.$$

例 4.6.6 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f:A\to B$.

(1) $A=P(\{1,2,3\}), B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$.

(2) $A=[0,1], B=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

(3) $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{N}$.

(4) $A=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right], B=[-1,1]$.

解　(1) $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$,

$B=\{f_0,f_1,\cdots,f_7\}$,其中

$f_0=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}, f_1=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_2=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}, f_3=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}, f_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_6=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}, f_7=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$.

令 $f:A\to B$,使得

$f(\varnothing)=f(0), f(\{1\})=f_1, f(\{2\})=f_2, f(\{3\})=f_3, f(\{1,2\})=f_4, f(\{1,3\})=f_5$,
$f(\{2,3\})=f_6, f(\{1,2,3\})=f_7$.

(2) 令 $f:[0,1]\to\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], f(x)=\frac{x+1}{4}$.

(3) 将$\mathbb{Z}$中元素依下列顺序排列并与$\mathbb{N}$中元素对应:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots
\end{array}$$

则这种对应所表示的函数是

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\geqslant 0, \\ -2x-1, & x<0. \end{cases}$$

(4) 令 $f:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to[-1,1], f(x)=\sin x$.

4.7　函数的复合与反函数

函数是一种特殊的二元关系,对函数右复合就是关系的右复合.一切和关系右复合有关的定理都适用于函数的复合.下面着重研究函数右复合中特有的性质.

定理 4.7.1　设 F,G 是函数,则 $F\circ G$ 也是函数,且满足:

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x\mid x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in\mathrm{dom}G\}$;

(2) $\forall x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$有 $F\circ G(x)=G(F(x))$.

证明　因为 F,G 是关系,所以 $F\circ G$ 也是关系.

若对某个 $x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$有 $xF\circ G_{y_1}$ 和 $xF\circ G_{y_2}$,则

$$\langle x,y_1\rangle\in F\circ G\wedge\langle x,y_2\rangle\in F\circ G$$
$$\Rightarrow\exists t_1(\langle x,t_1\rangle\in F\wedge\langle t_1,y_1\rangle\in G)\wedge\exists t_2(\langle x,t_2\rangle\in F\wedge\langle t_2,y_2\rangle\in G)$$
$$\Rightarrow\exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge\langle t_1,y_1\rangle)\in G\wedge(t_2,y_2)\in G(F\text{ 为函数})$$
$$\Rightarrow y_1=y_2(G\text{ 为函数}).$$

所以 $F\circ G$ 为函数.

任取 x,则

$$x\in \mathrm{dom}(F\circ G)\Rightarrow \exists t\exists y(\langle x,t\rangle\in F\wedge\langle t,y\rangle\in G)$$
$$\Rightarrow \exists t(x\in \mathrm{dom}F\wedge t=F(x)\wedge t\in \mathrm{dom}G)$$
$$\Rightarrow x\in\{x\mid x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}.$$

任取 x,则

$$x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\Rightarrow\langle x,F(x)\rangle\in F\wedge\langle F(x),G(F(x))\rangle\in G$$
$$\Rightarrow\langle x,G(F(x))\rangle\in F\circ G$$
$$\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(F\circ G)\wedge F\circ G(x)=G(F(x)).$$

所以(1)和(2)得证.

推论 1 设 F,G,H 为函数,则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数,且 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$.

证明 由定理 4.7.1 和定理 4.2.2 得证.

推论 2 设 $f:A\to B, g:B\to C$,则 $f\circ g:A\to C$,且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

证明 由定理 4.7.1 可知 $f\circ g$ 是函数,且

$$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x\mid x\in \mathrm{dom}f\wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B\}=A,$$
$$\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq \mathrm{ran}g\subseteq C.$$

因此有 $f\circ g:A\to C$,且有 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

定理 4.7.2 设 $f:A\to B, g:B\to C$.

(1) 如果 $f:A\to B, g:B\to C$ 都是满射的,则 $f\circ g:A\to C$ 也是满射的.

(2) 如果 $f:A\to B, g:B\to C$ 都是单射的,则 $f\circ g:A\to C$ 也是单射的.

(3) 如果 $f:A\to B, g:B\to C$ 都是双射的,则 $f\circ g:A\to C$ 也是双射的.

证明 (1) 任取 $c\in C$,因为 $g:B\to C$ 是满射的,则 $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$,对于这个 b,由于 $f:A\to B$ 也是满射的,所以 $\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由定理 4.7.1 有

$$f\circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c.$$

从而证明了 $f\circ g:A\to C$ 也是满射的.

(2) 假设存在 $x_1,x_2\in A$ 使得

$$f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2).$$

由定理 4.7.1 有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2)).$$

因为 $g:B\to C$ 是单射的,故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于 $f:A\to B$ 也是单射的,所以 $x_1=x_2$. 从而证明了 $f\circ g:A\to C$ 是单射的.

(3) 由(1)和(2)得证.

定理 4.7.2 说明函数的复合运算能够保持函数单射、满射、双射的性质. 但该定理的逆命题不为真,即如果 $f\circ g:A\to C$ 是单射(或满射、双射的),不一定有 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 都是单射(或满射、双射)的. 考虑集合

$$A=\{a_1,a_2,a_3\}, B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}, C=\{c_1,c_2,c_3\}.$$

令

$$f=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle\},$$
$$g=\{\langle b_1,c_1\rangle,\langle b_2,c_2\rangle,\langle b_3,c_3\rangle,\langle b_4,c_3\rangle\},$$

则有

$$f\circ g=\{\langle a_1,c_1\rangle,\langle a_2,c_2\rangle,\langle a_3,c_2\rangle\}.$$

不难看出 $f:A\to B$ 和 $f\circ g:A\to C$ 都是单射的，但 $f:A\to B$ 不是满射的.

定理 4.7.3　设 $f:A\to B$，则有

$$f=f\circ I_B=I_A\circ f.$$

证明　由定理 4.7.1 的推论 2 可知 $f\circ I_B:A\to B$ 和 $I_A\circ f:A\to B$.

任取 $\langle x,y\rangle$，则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in f &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f\land y\in B\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f\land\langle y,y\rangle\in I_B\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f\circ I_B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in f\circ I_B &\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in f\land\langle t,y\rangle\in I_B)\\ &\Rightarrow \langle x,t\rangle\in f\land t=y\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f.\end{aligned}$$

所以有 $f=f\circ I_B$.

同理可证 $I_A\circ f=f$.

定理 4.7.3 说明了恒等函数在函数复合中的特殊性质. 特别地，对于 $f\in A^A$，有

$$f\circ I_A=I_A\circ f=f.$$

下面考虑函数的逆运算.

任给函数 F，它的逆 F^{-1}不一定是一个函数，只是一个二元关系. 例如

$$F=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_1\rangle\},$$

则有

$$F^{-1}=\{\langle y_1,x_1\rangle,\langle y_1,x_2\rangle\}.$$

显然，F^{-1}不是函数. 因为对于 $y_1\in \mathrm{dom}F^{-1}$有 x_1 和 x_2 两个值与之对应，破坏了函数的单值性.

任给单值函数 $f:A\to B$，则 f^{-1}是函数，且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 B 的双射函数，但不一定是从 B 到 A 的双射函数. 因为对于某些 $y\in B-\mathrm{ran}f$，f^{-1}没有值与之对应.

对于什么样的函数 $f:A\to B$，它的逆 f^{-1}是从 B 到 A 的函数 $f^{-1}:B\to A$ 呢？我们有以下定理.

定理 4.7.4　设 $f:A\to B$ 是双射的，则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射的.

证明　先证明 f^{-1}是从 B 到 A 的函数 $f^{-1}:B\to A$. 因为 f 是函数，所以 f^{-1}是关系，且由定理 4.2.1 得

$$\mathrm{dom}f^{-1}=\mathrm{ran}f=B,\quad \mathrm{ran}f^{-1}=\mathrm{dom}f=A.$$

对于任意的 $x\in B=\mathrm{dom}f^{-1}$，假设有 $y_1,y_2\in A$ 使得

$$\langle x,y_1\rangle\in f^{-1}\land\langle x,y_2\rangle\in f^{-1}$$

成立，则由逆的定义有

$$\langle y_1,x\rangle\in f\land\langle y_2,x\rangle\in f.$$

根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$，从而证明了 f^{-1}是函数. 综上所述，$f^{-1}:B\to A$ 是满射的函数.

再证明 $f^{-1}:B\to A$ 的单射性，若存在 $x_1,x_2\in B$ 使得 $f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$. 从而有

$$\langle x_1,y\rangle\in f^{-1}\wedge\langle x_2,y\rangle\in f^{-1}\Rightarrow\langle y,x_1\rangle\in f\wedge\langle y,x_2\rangle\in f$$
$$\Rightarrow x_1=x_2(\text{因为是函数}).$$

对于双射函数 $f:A\to B$，则 $f^{-1}:B\to A$ 是它的反函数.

定理 4.7.5 设 $f:A\to B$ 是双射的，则

$$f^{-1}\circ f=I_B,f\circ f^{-1}=I_A.$$

证明 由定理 4.7.4 可知 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射的，再由定理 4.7.1 的推论 2 可知

$$f^{-1}\circ f:B\to B,f\circ f^{-1}:A\to A.$$

任取 $\langle x,y\rangle$，则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in f^{-1}\circ f&\Rightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in f^{-1}\wedge\langle t,y\rangle\in f)\\&\Rightarrow\exists t(\langle t,x\rangle\in f\wedge\langle t,y\rangle\in f)\\&\Rightarrow x=y\wedge x,y\in B(\text{因为 } f \text{ 是函数})\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in I_B\end{aligned}$$

任取 $\langle x,y\rangle$，则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in I_B&\Rightarrow x=y\wedge x,y\in B\\&\Rightarrow\exists t(\langle t,x\rangle\in f\wedge\langle t,y\rangle\in f)(f:A\to B\text{ 是双射})\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in f^{-1}\circ f.\end{aligned}$$

所以有 $f^{-1}\circ f=I_B$. 同理可证 $f\circ f^{-1}=I_A$.

定理 4.7.5 告诉我们，对于双射函数 $f:A\to A$，有

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A.$$

例 4.7.1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3,\\-2, & x<3;\end{cases}\quad g(x)=x+2.$$

求 $f\circ g,g\circ f$，如果 f 和 g 存在反函数，求出它们的反函数.

解 $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

$$f\circ g(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\geqslant 3,\\0, & x<3;\end{cases}$$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

$$g\circ f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, & x\geqslant 1,\\-2, & x<1.\end{cases}$$

因为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 不是双射的，不存在反函数. 而 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是双射的，它的反函数是

$$g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g^{-1}(x)=x-2.$$

习 题 4

1. 设 $A=\{1,2,3\},B=\{a,b,c\}$，求 $A\times B,A^2$.

2. 设 $A=\{0,1\},B=\{1,2\}$，求 $A\times\{2\}\times B$.

3. 设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，定义 A 上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\text{ 且 }x+y=10\}$，说明 R 具有哪些性质并说明理由.

4. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的关系，且 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$.

(1) 给出 R 的关系图及关系矩阵;

(2) 说明 R 的性质.

5. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，R 为 A 上的关系，R 的关系图如图 4.1 所示。

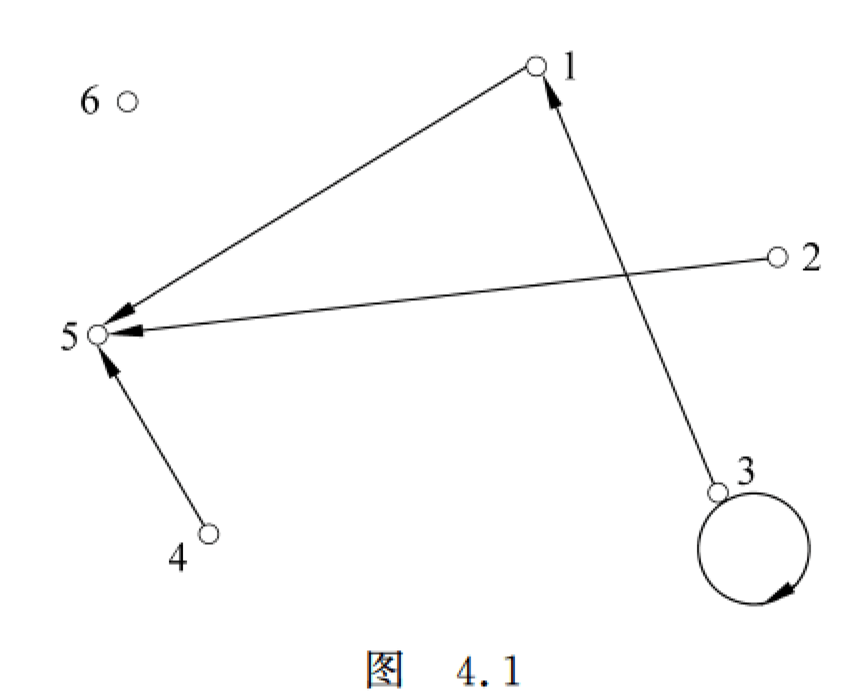


图 4.1

(1) 求 R^2,R^3 的集合表达式;

(2) 求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的集合表达式.

6. 设 $A=\{1,2,3\}$,图 4.2 给出了集合 A 上的关系,写出对应每种关系的关系矩阵,并说明它所具有的性质.

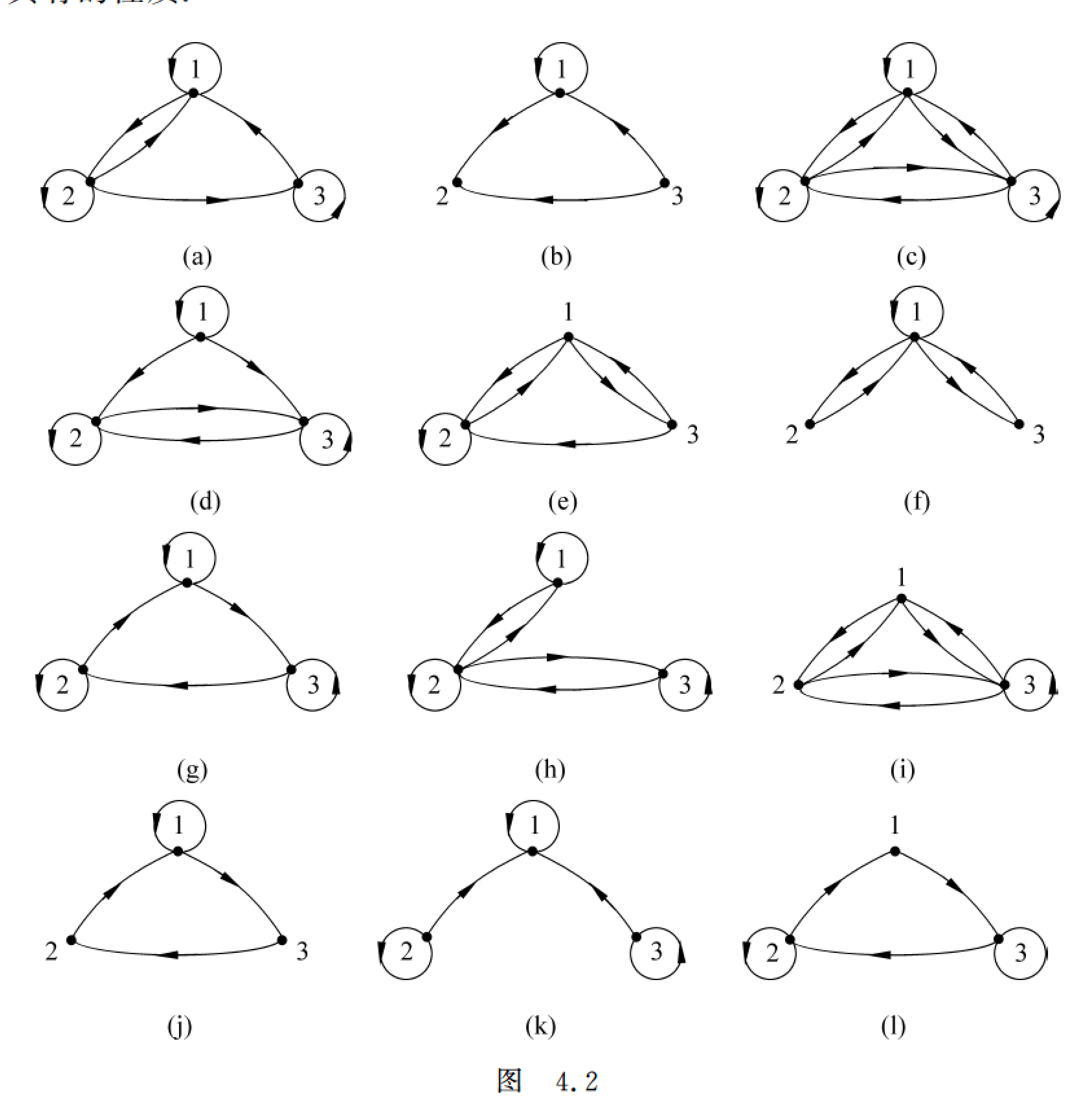


图 4.2

7. 针对图 4.3 中的每个哈斯图，写出集合以及偏序关系的表达式.

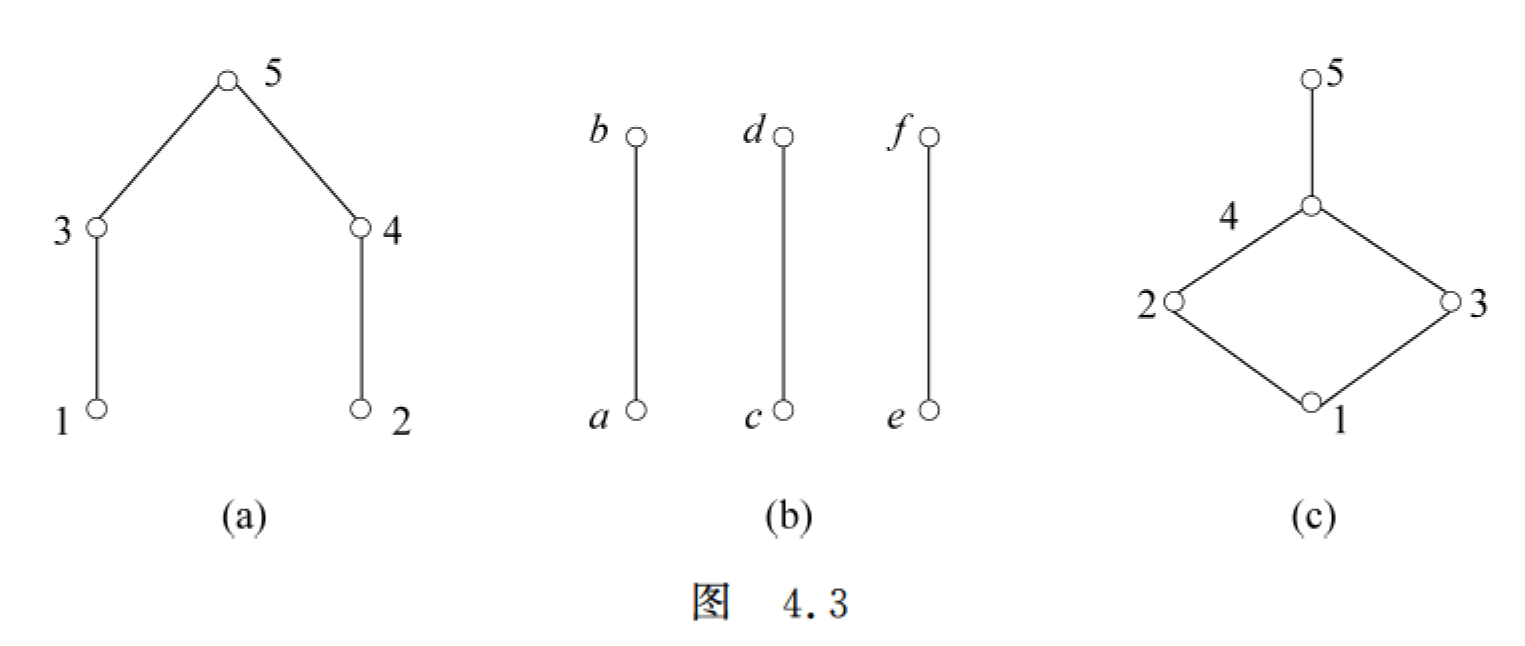


图 4.3

8. 写出下列集合与整除关系并画出哈斯图：

(1) {1,2,3,4,6,8,12,24}；

(2) {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.

第 5 章 代数系统

代数一般意义下被认为是对符号的操作，在历史上，代数的发展分为两个历史阶段. 19 世纪之前的代数称为古典代数，19 世纪至今的代数称为近世代数，也叫作抽象代数. 抽象代数是用代数的方法从不同的研究对象中概括出一般的数学模型并研究其规律、性质和结构，其主要内容是研究各种各样的代数结构. 抽象代数也称代数系统.

代数系统主要研究各种代数结构，诸如群、环、域等，它们是代数学的一个分支. 现在的代数学已经在计算科学、物理学、化学、力学、生物学等科学领域有着广泛的应用. 本章主要介绍代数系统的定义及性质、代数系统的同态与同构.

5.1 二元运算及其性质

定义 5.1.1 设 S 为集合，映射 $f:S\times S\to S$ 称为 S 上的**二元运算**，简称为**二元运算**. 即对任意的 $\langle x,y\rangle\in S\times S$，都存在 $z\in S$ 使得 $f(\langle x,y\rangle)=z$.

例如 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，$f(\langle x,y\rangle)=x+y$ 是自然数集合$\mathbb{N}$上的二元运算，即自然数集上的普通的加法运算是二元运算. 自然数集上的普通减法运算不是$\mathbb{N}$上的二元运算，因为两个自然数相减可能是负数，而负数不是自然数. 这时称$\mathbb{N}$对减法运算不封闭. 验证一个运算是否为集合$\mathbb{N}$上的二元运算，主要满足以下两点：

(1) S 中任意两个元素都可以进行该种运算，且运算的结果是唯一确定的.

(2) S 中任意两个元素的运算结果都属于 S，即 S 对该运算是封闭的.

例如实数集合$\mathbb{R}$上不可以定义除法运算，因为 $0\in\mathbb{R}$，而不能做除数. 但在$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$上就可以定义除法运算了，因为 $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$，都有 $\frac{x}{y}\in\mathbb{R}^*$.

下面给出二元运算的例子.

例 5.1.1 (1) 自然数集合$\mathbb{N}$上加法和乘法是$\mathbb{N}$上的二元运算，但减法和除法不是$\mathbb{N}$上的二元运算.

(2) 整数集合$\mathbb{Z}$上的加法、减法、乘法都是$\mathbb{Z}$上的二元运算，而除法不是$\mathbb{Z}$上的二元运算.

(3) 非零实数集合$\mathbb{R}^*$上的乘法和除法都是$\mathbb{R}^*$上的二元运算，而加法和减法不是$\mathbb{R}^*$上的二元运算，因为两个非零实数相加或相减可能得 0.

(4) 设 $M_n(\mathbb{R})$表示所有 n 阶($n\geqslant 2$)实数矩阵的集合，即

$$M_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i,j \leqslant n \right\},$$

则矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathbb{R})$上的二元运算.

(5) S 为集合,S^S 为 S 上的所有函数构成的集合,则函数的复合运算∘为 S^S上的二元运算.

通常用∘,∗,·等符号表示二元运算,称为算符.设 $f:S\times S\to S$ 是 S 上的二元运算,对任意的 $x,y\in S$,如果 x 与 y 的运算结果是 z,即

$$f(\langle x,y\rangle) = z,$$

则可以利用算符"∘"简记为 $x\circ y=z$.

例 5.1.2 设$\mathbb{R}$为实数集合,定义$\mathbb{R}$上的二元运算"∗"为

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x*y=x$$

计算 $3*4,(-5)*0.2,0*\frac{1}{2}$.

解 $3*4=3,(-5)*0.2=-5,0*\frac{1}{2}=0$.

类似于二元运算的定义,也可以在集合 S 上定义一元运算.下面给出一些一元运算的例子.

例 5.1.3 (1)在集合 S 的幂集合 $P(S)$上,若规定全集为 S,则求集合的绝对补运算~是 $P(S)$上的一元运算.

(2) 求一个数的相反数是实数集合$\mathbb{R}$、有理数集合$\mathbb{Q}$和整数集合$\mathbb{Z}$上的一元运算.

(3) 求一个数 x 的倒数$\frac{1}{x}$是非零有理数集合$\mathbb{Q}^*$上的一元运算.

(4) 求一个复数的共轭复数是复数集合$\mathbb{C}$上的一元运算.

下面给出一元运算定义.

定义 5.1.2 设 S 为集合,映射 $f:S\to S$ 称为 S 上的**一元运算**,简称**一元运算**.即对任意的 $x\in S$,都存在 $z\in S$ 使得 $f(x)=z$.可以用算符"∘"记为$\circ(x)=z$ 或$\circ x=z$,其中 x 为参加运算的元素,z 为运算的结果.

对于有限集 S 上的一元和二元运算,除了可以使用映射 f 的表达式以外,还可以用运算表给出一元运算和二元运算的一般形式,设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,"∘"为算符.则一元运算和二元运算分别见表 5.1.1 及表 5.1.2.

表 5.1.1

a_i	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$\circ a_n$

表 5.1.2

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1\circ a_1$	$a_1\circ a_2$	$\cdots$	$a_1\circ a_n$
a_2	$a_2\circ a_1$	$a_2\circ a_2$	$\cdots$	$a_2\circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n\circ a_1$	$a_n\circ a_2$	$\cdots$	$a_n\circ a_n$

例 5.1.4 设 $S=\{a,b\}$，给出 $P(S)$ 上的运算～和 $\cup$ 的运算表，其中全集为 S.

解 所求的运算表见表 5.1.3 和表 5.1.4.

表 5.1.3

a_i	$\sim a_i$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

表 5.1.4

$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

下面讨论二元运算的主要性质.

定义 5.1.3 设“$\circ$”为集合 S 上的二元运算.

(1) 如果对任意的 $x,y\in S$ 都有

$$x\circ y=y\circ x,$$

则称运算$\circ$在 S 上是**可交换的**，或者说运算$\circ$在 S 上**适合交换律**.

(2) 如果对任意的 $x,y,z\in S$ 都有

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),$$

则称运算$\circ$在 S 上是**可结合的**，或者说运算$\circ$在 S 上**适合结合律**.

(3) 如果对任意的 $x\in S$ 都有

$$x\circ x=x,$$

则称运算$\circ$**适合幂等律**.

注 如果 S 中的某些元素 x，满足 $x\circ x=x$，则称 x 为运算$\circ$的幂等元. 如果 S 上的二元运算适合幂等律，则 S 中的所有元素都是幂等元.

例 5.1.5 (1) 实数集合上的加法和乘法是可交换的、可结合的，但减法不可交换、不可结合. 实数的加法和乘法不适合幂等律，但 0 是加法的幂等元，0 和 1 是乘法的幂等元.

(2) 在幂集 $P(S)$ 上，集合的并运算和交运算是可交换的、可结合的，适合幂等律的.

(3) $n(n\geqslant 2)$ 阶实矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 上的矩阵加法是可交换的，但矩阵乘法是不可交换的.

(4) S^S 上函数的复合运算是不可交换的.

定义 5.1.4 设$\circ$和 $*$ 是 S 上的两个二元运算，如果对任意的 $x,y,z\in S$ 有

$$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z), \quad \text{(左分配律)}$$

$$(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x), \quad \text{(右分配律)}$$

则称运算 $*$ 对$\circ$是**可分配的**，也称 $*$ 对$\circ$适合**分配律**.

注 (1) 提到分配律时应该指明哪个运算对哪个运算可分配，不要笼统地讲它们适合分配律. 因为一个运算对另一个运算可分配，但反之不一定成立. 例如实数集$\mathbb{R}$上乘法对加法是可分配的，但加法对乘法不是可分配的.

(2) 使用归纳法不难证明，若 $*$ 对$\circ$运算分配律成立，则 $*$ 对$\circ$运算广义分配律也成立，即 $\forall x,y_1,y_2,\cdots,y_n\in S$ 有

$$x*(y_1\circ y_2\circ\cdots\circ y_n)=(x*y_1)\circ(x*y_2)\circ\cdots\circ(x*y_n),$$

$$(y_1 \circ y_2 \circ \cdots \circ y_n) * x = (y_1 * x) \circ (y_2 * x) \circ \cdots \circ (y_n * x)$$

成立.

例 5.1.6 (1) 实数集$\mathbb{R}$上的乘法对加法是可分配的.

(2) 在 n 阶 $(n \geqslant 2)$ 实矩阵的集合 $M_n(\mathbb{R})$上,矩阵乘法对于矩阵加法是可分配的.

(3) 幂集 $P(S)$上的 $\cup$ 对 $\cap$ 是可分配的; $\cap$ 对 $\cup$ 也是可分配的.

定义 5.1.5 设$\circ$和 $*$ 是 S 上两个可交换的二元运算,如果对任意的 x,y 都有

$$x * (x \circ y) = x, \quad x \circ (x * y) = x,$$

则称$\circ$和 $*$ 满足**吸收律**.

例 5.1.7 幂集 $P(S)$上的 $\cup$ 和 $\cap$ 运算满足吸收律,即$\forall A,B \in P(S)$有

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

下面介绍与二元运算有关的一些特殊的元素.

定义 5.1.6 设$\circ$ 为集合 S 上的二元运算,如果存在 e_l(或 e_r)使得对任何 $x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \quad (\text{或 } x \circ e_r = x)$$

成立,则称 e_l(或 e_r)是 S 中关于$\circ$运算的一个**左单位元**(或**右单位元**).若 e 关于$\circ$ 运算既是左单位元又是右单位元,则称 e 为 S 上关于$\circ$运算的**单位元**,单位元也称为**幺元**.

例 5.1.8 (1) 0 是实数集$\mathbb{R}$上加法的单位元,1 是乘法的单位元.

(2) n 阶零矩阵(元素全为 0)是矩阵加法的单位元,n 阶单位阵是矩阵乘法的单位元.

(3) 在 $P(S)$上,$\varnothing$是$\cup$运算的单位元, S 是 $\cap$ 运算的单位元, $\varnothing$ 是对称差运算 $\oplus$ 的单位元.

例 5.1.9 在非零实数集合$\mathbb{R}^*$上,定义二元运算$\circ$如下:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^*, \quad a \circ b = a,$$

则不存在 $e \in \mathbb{R}^*$,使$\forall b \in \mathbb{R}^*$,有 $e \circ b = b$,所以运算$\circ$没有左单位元,但对每一个 $a \in \mathbb{R}^*$,对任意 $b \in \mathbb{R}^*$,都有 $b \circ a = b$,所以$\mathbb{R}^*$ 中的每个元素 a 都是$\circ$运算的右单位元. $\mathbb{R}^*$ 中有无数多个右单位元,但任何右单位元都不是左单位元,$\mathbb{R}^*$ 中没有关于运算$\circ$的单位元.

定理 5.1.1 设$\circ$为集合 S 上的二元运算,e_l 和 e_r 分别为 S 中关于$\circ$运算的左单位元和右单位元,则有 $e_l = e_r = e$ 且 e 为 S 上关于$\circ$运算的唯一的单位元.

证明 因为 $e_l = e_l \circ e_r$(e_r 为右单位元),$e_l \circ e_r = e_r$(e_l 为左单位元),所以 $e_l = e_r$.

把 $e_l = e_r$ 记作 e,则 e 是 S 中的单位元.

下证单位元的唯一性.假设 e'是 S 中的单位元,则有 $e' = e \circ e' = e$,所以 e 是 S 中关于$\circ$运算的唯一的单位元.

定义 5.1.7 设$\circ$为 S 上的二元运算,若存在元素 θ_l(或 θ_r)$\in S$ 使得对任意的 $x \in S$,有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \quad (\text{或 } x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称 θ_l(或 θ_r)是 S 上关于$\circ$运算的左零元(或右零元).若 $\theta \in S$ 关于$\circ$ 运算既是左零元又是右零元,则称 θ 为 S 上关于$\circ$运算的零元.

例 5.1.10 (1) 在幂集 $P(S)$上, $\cup$ 运算的零元是 S, $\cap$ 运算的零元是$\varnothing$.

(2) $M_n(\mathbb{R})(n \geqslant 2)$上矩阵乘法运算的零元是零矩阵,矩阵加法运算无零元.

(3) 0 是实数集上普通乘法的零元,但加法没有零元.

(4) 在$\mathbb{R}^*$上定义运算$\circ$,对任意 $a,b \in \mathbb{R}^*$,$a \circ b = a$,则$\mathbb{R}^*$ 中的任何元素都是运算$\circ$的左零元,但没有右零元,因而没有零元.

定理 5.1.2 设$\circ$为集合 S 上的二元运算,θ_l 和 θ_r 分别为$\circ$运算的左零元和右零元,则有 $\theta_l=\theta_r=\theta$,且 θ 是 S 关于$\circ$运算的唯一的零元.

证明留作练习,读者自证.

关于零元和单位元还有以下定理.

定理 5.1.3 设$\circ$为集合 S 上的二元运算,e 和 θ 分别为$\circ$运算的单位元和零元.如果集合 S 中至少有两个元素,则 $e\neq\theta$.

证明 用反证法.假设 $e=\theta$,则 $\forall x\in S$ 有

$$x = x\circ e = x\circ\theta = \theta.$$

这与集合 S 中至少含有两个元素相矛盾.

定义 5.1.8 设$\circ$为集合 S 上的二元运算,e 为$\circ$运算的单位元,对于 $x\in S$,如果存在 $y_l\in S$(或 $y_r\in S$)使得 $y_l\circ x=e$(或 $x\circ y_r=e$)则称 y_l(或 y_r)是 x 的左逆元(或右逆元).若 $y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元,则称 y 是 x 的逆元.如果 x 的逆元存在,则称 x 是可逆的.

例 5.1.11 (1) 整数集$\mathbb{Z}$上加法的单位元是 0.任何整数关于加法都存在逆元且逆元为它的相反数.

(2) 在 $P(S)$上,对$\cap$运算 S 为单位元,只有 S 有逆元,就是它自己,其他元素没有逆元.

(3) 在 $M_n(\mathbb{R})$上,零矩阵是矩阵加法的单位元,实矩阵 $\boldsymbol{M}$ 关于加法的逆元为$-\boldsymbol{M}$,而单位阵是关于矩阵乘法的单位元,只有可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在乘法的逆元 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

由上面的例子可以看出,对于给定的集合和二元运算来说,逆元与单位元、零元不同.如果单位元或零元存在,一定是唯一的,即整个集合只有一个.而逆元是否存在,与元素有关.有的元素有逆元,有的元素没有逆元,不同的元素对应着不同的逆元.如果运算是可结合的,那么对于集合中存在逆元的元素,逆元是唯一的.

定理 5.1.4 设$\circ$为集合 S 上可结合的二元运算,e 为该运算的单位元,对于 $x\in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r,则有 $y_r=y_l=y$,且 y 是 x 唯一的逆元.

证明 由 $y_l\circ x=e$ 和 $x\circ y_r=e$,得

$$y_l = y_l\circ e = y_l\circ(x\circ y_r) = (y_l\circ x)\circ y_r = e\circ y_r = y_r.$$

令 $y_r=y_l=y$,则 y 是 x 逆元.假若 y' 也是 x 的逆元,则

$$y' = y'\circ e = y'\circ(x\circ y) = (y'\circ x)\circ y = e\circ y = y,$$

所以 y 是 x 的唯一逆元.

由定理 5.1.4 可知,对于可结合的二元运算来说,可逆的元素 x 只有唯一的逆元,通常把它记作 x^{-1}.

最后给出一条关于二元运算的运算律——消去律.

定义 5.1.9 设$\circ$为集合 S 上的二元运算,如果对于任意的 $x,y,z\in S$,满足以下条件:

(1) 若 $x\circ y=x\circ z$ 且 $x\neq\theta$,则 $y=z$;

(2) 若 $y\circ x=z\circ x$ 且 $x\neq\theta$,则 $y=z$.

那么称$\circ$运算满足**消去律**,其中(1)称作**左消去律**,(2)称作**右消去律**.

注 被消去的 $x\neq\theta$.

例 5.1.12 (1) 整数集合$\mathbb{Z}$上的加法和乘法都满足消去律.

(2) 幂集 $P(S)$上的 $\cap$ 和 $\cup$ 一般不满足消去律. 例如对于 $A,B,C\in P(S)$, $A\cup B=A\cup C$,不一定能得到 $B=C$.

(3) $n(n\geqslant 2)$阶实矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$上的矩阵加法满足消去律. 但乘法不满足消去律,例如$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$,但$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

例 5.1.13 下面给出了集合和该集合上的二元运算,请指出该运算的性质,零元和所有可逆元素的逆元.

(1) $\mathbb{Z}^+$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}^+$, $x*y=\mathrm{lcm}\,(x,y)$,即求 x 和 y 的最小公倍数.

(2) $\mathbb{Q}$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}$, $x*y=x+y-xy$.

解 (1) $*$ 运算可交换、可结合,是幂等的.

$\forall x\in\mathbb{Z}^+$, $x*1=x$, $1*x=x$, 1 为单位元.

不存在零元.

只有 1 有逆元,是它自己,其他正整数无逆元.

(2) $*$ 运算满足交换律,因为 $\forall x,y\in\mathbb{Q}$,有

$$x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x.$$

$*$ 运算满足结合律,因为 $\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$,有

$$(x*y)*z=(x+y-xy)*z=x+y+z-xy-xz-yz+xyz,$$
$$x*(y*z)=x*(y+z-yz)=x+y+z-xy-xz-yz+xyz,$$

所以

$$(x*y)*z=x*(y*z).$$

$*$ 运算不满足幂等律,因为 $2\in\mathbb{Q}$,但 $2*2=2+2-2\times 2=0\neq 2$.

$*$ 运算满足消去律,因为 $\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$, $x\neq 1$ (1 为零元),由

$$x*y=x*z,$$

有

$$x+y-xy=x+z-xz,\quad 即\quad (y-z)=x(y-z).$$

进一步有

$$y=z\quad (x\neq 1).$$

故左消去律成立. 由于 $*$ 是可交换的,右消去律显然成立. 综上,消去律成立.

$\forall x\in\mathbb{Q}$ 有,

$$x*0=x=0*x,$$

0 是 $*$ 运算的单位元.

$\forall x\in\mathbb{Q}$ 有,

$$x*1=1=1*x,$$

1 是 $*$ 运算的零元.

$\forall x\in\mathbb{Q}$,欲使 $x*y=0$ 和 $y*x=0$ 成立,即

$$x+y-xy=0,$$

解得 $y=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1)$,从而有 $x^{-1}=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1)$.

5.2 代数系统

定义 5.2.1　非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 组成的系统称为一个**代数系统**，简称代数，记作 $\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$.

例 5.2.1　(1) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$，$\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$，$\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ 是代数系统，其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示普通加法和乘法.

(2) $\langle M_n(\mathbb{R}), +, \cdot \rangle$ 是代数系统，其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示 n 阶($n \geqslant 2$)实矩阵的加法和乘法.

(3) $\langle P(S), \cup, \cap, \sim \rangle$ 是代数系统，其中含有两个二元运算 $\cup$ 和 $\cap$ 以及一个一元运算 $\sim$.

在某些代数系统中，存在着一些特定的元素，它对该系统的一元或二元运算起着重要的作用，例如二元运算的单位元和零元. 在定义代数系统时，常把含有这样的特定元素也作为系统的性质，比如规定系统的二元运算必须含有单位元，称这些元素为该代数系统的特异元素或代数常数. 为了强调某个代数系统是含有代数常数的系统，也可以把这些代数常数列到系统的表达式中，例如 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 中的“$+$”运算有单位元 0，为了强调 0 的存在，将 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 记作 $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$. 又如 $\langle P(S), \cup, \cap, \sim \rangle$ 中的 $\cup$ 和 $\cap$ 运算存在单位元 $\varnothing$ 和 S，规定 $\varnothing$ 和 S 是该系统的代数常数时，也可将它记为 $\langle P(S), \cup, \cap, \sim, \varnothing, S \rangle$. 在不发生混淆的情况下，为了叙述的方便，也用集合的名字来表示代数系统，例如上述代数系统可以简记为 $\mathbb{Z}$ 和 $P(S)$.

定义 5.2.2　如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称这两个代数系统具有相同的构成成分，也称它们是**同类型的代数系统**.

例 5.2.2　$V_1 = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ 与 $V_2 = \langle P(S), \cup, \cap, \sim, \varnothing, S \rangle$ 是同类型的代数系统，它们都含有两个二元运算、一个一元运算和两个代数常数.

同类型的代数系统只是构成成分相同，不一定具有相同的运算性质. 上例中 V_1 和 V_2 是同类型的代数系统，但它们的运算性质是有区别的，见表 5.2.1.

表　5.2.1

V_1	V_2
$+$ 和 $\cdot$ 可交换，可结合	$\cup$ 和 $\cap$ 可交换，可结合
$\cdot$ 对 $+$ 可分配	$\cup$ 和 $\cap$ 互相可分配
$+$ 和 $\cdot$ 不遵从幂等律	$\cup$ 和 $\cap$ 都有幂等律
$+$ 和 $\cdot$ 没有吸收律	$\cup$ 和 $\cap$ 有吸收律
$+$ 和 $\cdot$ 没有消去律	$\cup$ 和 $\cap$ 一般没有消去律

在规定了代数系统的构成成分后(即集合、运算以及代数常数以后)，如果再对这些运算所遵从算律加以限制，那么满足这些条件的代数系统就具有相同的性质，从而构成了一类特殊的代数系统.

定义 5.2.3　设 $V = \langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 是代数系统，$B \subseteq S$，如果 B 对 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 都是

封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，则称 $\langle B, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$ 是 V 的**子代数系统**，简称**子代数**. 也将子代数系统简记为 B.

例 5.2.3　(1) $\mathbb{N}$ 是$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$的子代数，因为$\mathbb{N}$ 对加法运算＋是封闭的.

(2) $\mathbb{N}$ 是$\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$的子代数，因为$\mathbb{N}$ 对加法运算＋封闭，且$\mathbb{N}$ 中含有代数常数 0.

(3) $\mathbb{N}-\{0\}$是$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$的子代数，但不是$\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$的子代数，因为$\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$的代数常数 $0 \notin \mathbb{N}-\{0\}$.

从子代数定义不难看出，子代数和原代数不仅具有相同的构成成分，是同类型的代数系统，而且对应的二元运算都具有相同的运算性质. 因为任何二元运算的性质，如果在原代数上成立，那么在它的子集上显然也是成立的. 对于任何代数系统 $V=\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$，其子代数一定存在. 最大的子代数就是 V 本身. 如果令 V 中所有代数常数构成的集合是 B，且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的，则 B 就构成了 V 的最小的子代数. 这种最大和最小的子代数称为 V 的平凡子代数. 若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数.

例 5.2.4　设 $V=\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$，令 $n\mathbb{Z}=\{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$，$n$ 为自然数，则 $n\mathbb{Z}$ 是 V 的子代数.

证明　任取 $n\mathbb{Z}$ 中的两个元素 nz_1, nz_2 $(z_1, z_2 \in \mathbb{Z})$，则有

$$nz_1 + nz_2 = n(z_1 + z_2) \in n\mathbb{Z},$$

即 $n\mathbb{Z}$ 对＋运算是封闭的. 又 $0=n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$，所以，$n\mathbb{Z}$ 是 V 的子代数.

当 $n=0$ 和 1 时，$n\mathbb{Z}$ 是 V 的平凡子代数，其他的都是 V 的非平凡的真子代数.

由已知的代数系统可以通过系统的方法构成新的系统，即子代数与积代数，这些代数系统能够保持或者基本上保持原有代数系统的良好性质. 下面给出积代数的定义.

定义 5.2.4　设 $V_1=\langle A, \circ \rangle$和 $V_2=\langle B, * \rangle$是同类型的代数系统，$\circ$和 $*$ 为二元运算，在集合 $A \times B$ 上定义如下二元运算 $\bullet$，$\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B$ 有

$$\langle a_1, b_1 \rangle \bullet \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 \circ a_2, b_1 * b_2 \rangle,$$

称 $V=\langle A \times B, \bullet \rangle$ 为 V_1 和 V_2 的**积代数**，记作 $V_1 \times V_2$. 这时也称 V_1 和 V_2 为 V 的**因子代数**.

例 5.2.5　设 V_1 和 V_2 分别为模 3 和模 2 关于加法构成的代数系统，给出 $V_1 \times V_2$ 的运算表，并说明它的运算是否具有交换律与结合律，是否具有单位元.

解　运算表如表 5.2.2 所示.

表　5.2.2

$\oplus$	⟨0,0⟩	⟨0,1⟩	⟨1,0⟩	⟨1,1⟩	⟨2,0⟩	⟨2,1⟩
⟨0,0⟩	⟨0,0⟩	⟨0,1⟩	⟨1,0⟩	⟨1,1⟩	⟨2,0⟩	⟨2,1⟩
⟨0,1⟩	⟨0,1⟩	⟨0,0⟩	⟨1,1⟩	⟨1,0⟩	⟨2,1⟩	⟨2,0⟩
⟨1,0⟩	⟨1,0⟩	⟨1,1⟩	⟨2,0⟩	⟨2,1⟩	⟨0,0⟩	⟨0,1⟩
⟨1,1⟩	⟨1,1⟩	⟨1,0⟩	⟨2,1⟩	⟨2,0⟩	⟨0,1⟩	⟨0,0⟩
⟨2,0⟩	⟨2,0⟩	⟨2,1⟩	⟨0,0⟩	⟨0,1⟩	⟨1,0⟩	⟨1,1⟩
⟨2,1⟩	⟨2,1⟩	⟨2,0⟩	⟨0,1⟩	⟨0,0⟩	⟨1,1⟩	⟨1,0⟩

$V_1 \times V_2$中的 $\oplus$ 运算具有交换律、结合律，单位元是 $\langle 0,0 \rangle$.

易见积代数与它的因子代数是同类型的代数系统，可以证明积代数能够保持因子代数中的许多良好的性质.

定理 5.2.1 设 $V_1=\langle A,\circ\rangle$ 和 $V_2=\langle B,*\rangle$ 是同类型的代数系统，$V_1\times V_2=\langle A\times B,\cdot\rangle$ 是它们的积代数.

(1) 如果$\circ$ 和 $*$ 运算是可交换(可结合、幂等)的，那么 $\cdot$ 运算也是可交换(可结合、幂等)的；

(2) 如果 e_1 和 e_2(θ_1 和 θ_2)分别为$\circ$和$*$运算的单位元(零元)，那么$\langle e_1,e_2\rangle$($\langle\theta_1,\theta_2\rangle$)也是$\cdot$运算的单位元(零元)；

(3) 如果 x 和 y 分别为$\circ$ 和 $*$ 运算的可逆元素，那么$\langle x,y\rangle$也是$\cdot$运算的可逆元素，其逆元就是$\langle x^{-1},y^{-1}\rangle$.

证明 这里只证明(1)中的结合律，(2)中的单位元，其他性质的证明留作练习.

(1) 任取$\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle\in V_1\times V_2$，则

$$
\begin{aligned}
(\langle a_1,b_1\rangle\cdot\langle a_2,b_2\rangle)\cdot\langle a_3,b_3\rangle &=\langle a_1\circ a_2,b_1*b_2\rangle\cdot\langle a_3,b_3\rangle\\
&=\langle (a_1\circ a_2)\circ a_3,(b_1*b_2)*b_3\rangle\\
&=\langle a_1\circ(a_2\circ a_3),b_1*(b_2*b_3)\rangle \quad (\text{因为}\circ\text{和}*\text{运算都满足结合律})\\
&=\langle a_1,b_1\rangle\cdot\langle a_2\circ a_3,b_2*b_3\rangle\\
&=\langle a_1,b_1\rangle\cdot(\langle a_2,b_2\rangle\cdot\langle a_3,b_3\rangle).
\end{aligned}
$$

(2) 任取$\langle a,b\rangle\in V_1\times V_2$，则

$$\langle a,b\rangle\cdot\langle e_1,e_2\rangle=\langle a\circ e_1,b*e_2\rangle=\langle a,b\rangle,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle\cdot\langle a,b\rangle=\langle e_1\circ a,e_2*b\rangle=\langle a,b\rangle.$$

因此$\langle e_1,e_2\rangle$是关于$\cdot$运算的单位元.

积代数的定义可以推广到具有多个运算的同类型的代数系统. 在具有两个不同的二元运算的情况下，使用与定理 5.2.1 中类似的方法不难证明：积代数也保留因子代数的分配律和吸收律等性质. 但是积代数不一定保留因子代数的消去律性质.

例 5.2.6 设 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，其中 n 是正整数，$V_1=\langle Z_4,\otimes_4\rangle$，$V_2=\langle Z_3,\otimes_3\rangle$ 分别表示模 4 和模 3 乘法的代数系统. 那么 V_1 和 V_2 中的运算都满足消去律. 考虑积代数 $\langle V_1\times V_2,\otimes\rangle$，这里的$\otimes$运算不满足消去律，因为 $V_1\times V_2$ 中有

$$\langle 2,0\rangle\otimes\langle 0,2\rangle=\langle 0,0\rangle=\langle 2,0\rangle\otimes\langle 0,0\rangle,$$

$\langle 2,0\rangle$不是零元，在上式中用消去律将它消去，就得到 $\langle 0,2\rangle=\langle 0,0\rangle$，显然这是错误的.

5.3 代数系统的同态与同构

实际中存在着很多不同的代数系统，有些系统是同类型的，有些不是同类型的，而且具有共同的运算性质，因此是同种的. 在同种的代数系统中，有些系统在结构上更为相似，甚至完全一样.

例如代数系统 $V_1=\langle Z_3,\oplus_3\rangle$，$V_2=\langle A,\oplus_6\rangle$，其中

$$Z_3=\{0,1,2\},\quad A=\{0,2,4\},$$

分别表示模 3 和模 6 加. 这两个代数系统的运算表见表 5.3.1 和表 5.3.2.

表 5.3.1

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

表 5.3.2

$\oplus_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

把表 5.3.1 中的 1 和 2 分别替换成 2 和 4,就可以得到表 5.3.2.这个替换可以表示成函数:$f=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$在双射函数 f 的作用下,代数系统 V_1转换成了 V_2.它们是同构的,都是抽象代数系统 $\{a,b,c\}$ 的实例.

定义 5.3.1 设 $V_1=\langle A,\circ\rangle$和 $V_2=\langle B,*\rangle$是同类型的代数系统,f: $A\to B$,且 $\forall x,y\in A$ 有 $f(x\circ y)=f(x)*f(y)$,则称 f 是 V_1到 V_2 的**同态映射**,简称**同态**.

根据同态映射的性质可以将同态分为单同态、满同态和同构.即 f 如果是单射,则称为单同态.如果是满射,则称为满同态,这时称 V_2是 V_1的同态像,记作 $V_1\sim V_2$;如果是双射,则称为同构,也称代数系统 V_1同构于 V_2,记作 $V_1\cong V_2$.

如果同态映射 f 是 V 到 V 的,则称 f 为自同态.类似地可以定义单自同态、满自同态和自同构.

设 f 是 $V_1=\langle A,\circ\rangle$到 $V_2=\langle B,*\rangle$的同态映射,那么 f 具有许多良好的性质.首先,如果$\circ$运算具有交换律、结合律、幂等律等,那么在同态像 $f(V_1)$ 中,$*$ 运算也具有相同的算律(注意:消去律可能有例外).此外,同态映射 f 恰好把 V_1的单位元 e_1映到 V_2的单位元 e_2,即 $f(e_1)=e_2$.同样对于零元和可逆元也有 $f(\theta_1)=\theta_2$,$f(x^{-1})=f(x)^{-1}$.

上述关于同态映射的定义可以推广到具有有限多个运算的代数系统.例如,对于具有两个二元运算的代数系统 $V_1=\langle A,\circ_1,\circ_2\rangle$和 $V_2=\langle B,*_1,*_2\rangle$,$f$: $A\to B$. 如果 $\forall x,y\in A$ 有 $f(x\circ_1 y)=f(x)*_1 f(y)$和 $f(x\circ_2 y)=f(x)*_2 f(y)$,那么 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射.

例 5.3.1 (1) 设代数系统 $V_1=\langle\mathbb{Z},+\rangle$,$V_2=\langle Z_n,\oplus\rangle$,其中$\mathbb{Z}$为整数集合,+为普通加法,$Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$,$\oplus$ 为模 n 加.令

$$f:\mathbb{Z}\to Z_n,\quad f(x)=(x)\bmod n,$$

那么 f 是 V_1到 V_2的满同态.显然 f 是满射,且 $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ 有

$$f(x+y)=(x+y)\bmod n=(x)\bmod n\oplus(y)\bmod n=f(x)\oplus f(y).$$

(2) 设 $V_1=\langle\mathbb{R},+\rangle$,$V_2=\langle\mathbb{R}^*,\cdot\rangle$,其中$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}^*$ 分别为实数集与非零实数集,+和·分别表示普通加法与乘法.令

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*,\quad f(x)=e^x,$$

则 f 是 V_1 到 V_2 的单同态，易见 f 是单射，且 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=f(x)\cdot f(y).$$

(3) 设 $V=\langle\mathbb{Z},+\rangle$，其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集合，$+$ 为普通加法. $\forall a\in\mathbb{Z}$ 令

$$f_a:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^*,\quad f_a(x)=ax,$$

那么 f_a 是 V 的自同态. 因为 $\forall x,y\in\mathbb{Z}$，有

$$f_a(x+y)=a(x+y)=ax+ay=f_a(x)+f_a(y).$$

当 $a=0$ 时，称 f_0 为零同态；当 $a=\pm 1$ 时，称 f_a 为自同构；除此之外其他的 f_a 都是单自同态.

例 5.3.2 设 $V=\langle Z_n,\oplus\rangle$，其中 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，$\oplus$ 为模 n 加. 证明恰含有 n 个 V 的自同态.

证明 先证存在着 n 个 V 的自同态. 令

$$f_p:Z_n\to Z_n,\quad f_p(x)=(px)\bmod n,\quad p=0,1,\cdots,n-1,$$

则 f_p 是 V 的自同态. 因为 $\forall x,y\in Z_n$，有

$$f_p(x\oplus y)=(p(x\oplus y))\bmod n=(px)\bmod n\oplus(py)\bmod n=f_p(x)\oplus f_p(y).$$

由于 p 有 n 种取值，不同的 p 确定了不同的映射 f_p，所以存在 n 个 V 的自同态.

下面证明任何 V 的自同态都是上述 n 个自同态中的一个，设 f 是 V 的自同态，且 $f(1)=i$，$i\in\{0,\cdots,n-1\}$，下面证明 $\forall x\in Z_n$ 有

$$f(x)=(ix)\bmod n.$$

显然 $f(1)=i=(i\cdot 1)\bmod n$.

假设对一切 $x\in\{1,2,\cdots,n-2\}$ 有 $f(x)=(ix)\bmod n$ 成立. 那么

$$\begin{aligned}f(x+1)&=f(x\oplus 1)=f(x)\oplus f(1)=(ix)\bmod n\oplus i\\&=(ix+i)\bmod n=(i(x+1))\bmod n,\end{aligned}$$

从而 $\forall x\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 有 $f(x)=ix \bmod n$. 最后有

$$\begin{aligned}f(0)&=f((n-1)\oplus 1)=f(n-1)\oplus f(1)\\&=(i(n-1))\bmod n\oplus i\\&=(in)\bmod n=0\\&=(i\cdot 0)\bmod n.\end{aligned}$$

习 题 5

1. 列出以下运算的运算表：

   (1) $A=\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$，$\forall x\in A$，$\circ x$ 是 x 的倒数，即 $\circ x=\frac{1}{x}$；

   (2) $A=\{1,2,3,4\}$，$\forall x,y\in A$，有 $x\circ y=\max\{x,y\}$，$\max\{x,y\}$ 是 x 和 y 之中较大的数.

2. 设代数系统 $\langle A,*\rangle$，其中 $A=\{a,b,c\}$，$*$ 是 A 上的代数运算. 对于表(1)，(2)，(3)所确定的运算，试分别讨论它们的交换性、等幂性以及在 A 中关于 $*$ 是否有幺元. 如果有幺元，那么 A 中的每个元素是否有逆元.

表 (1)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

表 (2)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	c	c

表 (3)

*	a	b	c
a	b	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

3. 考查代数系统 $A=\langle N,\times\rangle$ 和 $B=\langle\{0,1\},\times\rangle$，其中$\mathbb{N}$ 是自然数集合，$\times$是一般乘法. 给定函数 $f:\mathbb{N}\rightarrow\{0,1\}$，$f(n)=\begin{cases}1 & ,\text{如果 } n=2^k,\\ 0 & ,\text{其他情况}\end{cases}$ $(k\geqslant 0)$. 试证明 f 是从 A 到 B 的同态.

4. 设集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，问下面定义的二元运算 $*$ 关于集合 A 是否封闭.
   (1) $x*y=\max\{x,y\}$；
   (2) $x*y=\min\{x,y\}$；
   (3) $x*y=\gcd(x,y)$；(x 与 y 的最大公约数)
   (4) $x*y=\text{lcm}(x,y)$. (x 与 y 的最小公倍数)

5. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：
   (1) 整数集合$\mathbb{Z}$ 和普通的减法运算；
   (2) 非零整数集合$\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算；
   (3) 正实数集合$\mathbb{R}^+$ 和$\circ$ 运算，其中$\circ$ 运算定义如下：
   $$\forall a,b\in A, a\circ b=ab-a-b;$$
   (4) $n\in\mathbb{Z}^+$，$n\mathbb{Z}=\{nz\mid z\in\mathbb{Z}\}$，$n\mathbb{Z}$ 关于普通的加法和乘法运算；
   (5) $S=\{2x-1\mid x\in\mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算；
   (6) $S=\{0,1\}$，S 关于普通的加法和乘法运算.

6. 下面几个集合都是$\mathbb{N}$ 的子集，它们能否构成代数系统 $V=\langle\mathbb{N},+\rangle$的子代数：
   (1) $\{x\mid x\in\mathbb{N}$ 且 x 的某次幂可以被 16 整除$\}$；
   (2) $\{x\mid x\in\mathbb{N}$ 且 x 是 30 的因子$\}$；
   (3) $\{x\mid x\in\mathbb{N}$ 且 x 是 30 的倍数$\}$.

7. 设 $V=\langle\mathbb{Z},+,\cdot\rangle$，其中$+$和$\cdot$分别代表普通加法和乘法，对下面给定的每个集合，判定它是否构成 V 的子代数，为什么？
   (1) $S_1=\{2n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ ；
   (2) $S_2=\{2n+1\mid n\in\mathbb{Z}\}$；
   (3) $S_3=\{-1,0,1\}$.

8. 设 $V_1=\langle\{1,2,3\},\circ,1\rangle$，其中 $x\circ y$ 表示取 x 和 y 之中较大的数. $V_2=\langle\{5,6\},*,6\rangle$，其中 $x*y$ 表示取 x 和 y 之中较小的数. 求出 V_1 和 V_2的所有的子代数，并指出哪些是平凡子代数？哪些是真子代数？

第6章 格与布尔代数

格论大约形成于1935年，是戴德金(Dedekind)在研究交换环及理想时引入的概念，格论是代数学的一个分支，而且它在近代解析几何及偏序空间等方面都有着重要的应用. 布尔代数是以19世纪中叶英国数学家布尔(G. Boole)的名字命名. 它在研究命题演算、开关理论中有着重要的应用. 布尔代数是一种特殊的代数系统，许多代数系统都与之同构. 本章主要介绍格的两种等价定义，再介绍两种特殊的格——分配格和有补格，在此基础上给出有补分配格——布尔代数.

6.1 格的定义与性质

格与布尔代数是具有两个二元运算的代数系统，它们在逻辑电路设计、软件形式方法、数据仓库等各方面都有重要的应用. 下面先给出格的定义和基本性质.

首先说明，本章出现的 $\wedge$ 和 $\vee$ 的符号不再代表逻辑上的合取与析取，而是格中的运算符，涉及合取与析取，我们将加以说明. 下面从偏序集的角度给出格的定义.

定义 6.1.1 设 $\langle S,\leqslant\rangle$ 是偏序集，如果 $\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 $\leqslant$ 作成一个**格**.

最小上界和最大下界分别唯一存在. x 和 y 的最小上界与最大下界分别用 $x\vee y$ 和 $x\wedge y$ 表示.

例 6.1.1 设 n 是正整数，S_n 是 n 的正因子的集合. D 为整除关系，判断偏序集 $\langle S_8,D\rangle$，$\langle S_6,D\rangle$ 及 $\langle S_{30},D\rangle$ 是否构成格.

解 $\forall x,y\in S_n(n=8,6,30)$，$x\vee y=\mathrm{lcm}\,(x,y)$，即 x 与 y 的最小公倍数. $x\wedge y=\gcd(x,y)$，即 x 与 y 的最大公约数. 哈斯图见图 6.1.1. 显然 $\langle S_8,D\rangle$，$\langle S_6,D\rangle$ 和 $\langle S_{30},D\rangle$ 均构成格.

例 6.1.2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $\langle P(B),\subseteq\rangle$，其中 $P(B)$ 是集合 B 的幂集.

(2) $\langle \mathbb{Z},\leqslant\rangle$，其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集，$\leqslant$ 为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在图 6.1.2 给出.

解 (1) $\langle P(B),\subseteq\rangle$ 是格. $\forall x,y\in P(B)$，$x\vee y=x\cup y$，$x\wedge y=x\cap y$. 由于 $\cup$ 和 $\cap$ 运算在 $P(B)$ 上是封闭的，所以 $x\cup y,x\cap y\in P(B)$. 称 $\langle P(B),\subseteq\rangle$ 为 B 的幂格.

(2) $\langle \mathbb{Z},\leqslant\rangle$ 是格. $\forall x,y\in \mathbb{Z}$，$x\vee y=\max\{x,y\}$，$x\wedge y=\min\{x,y\}$，它们都是整数.

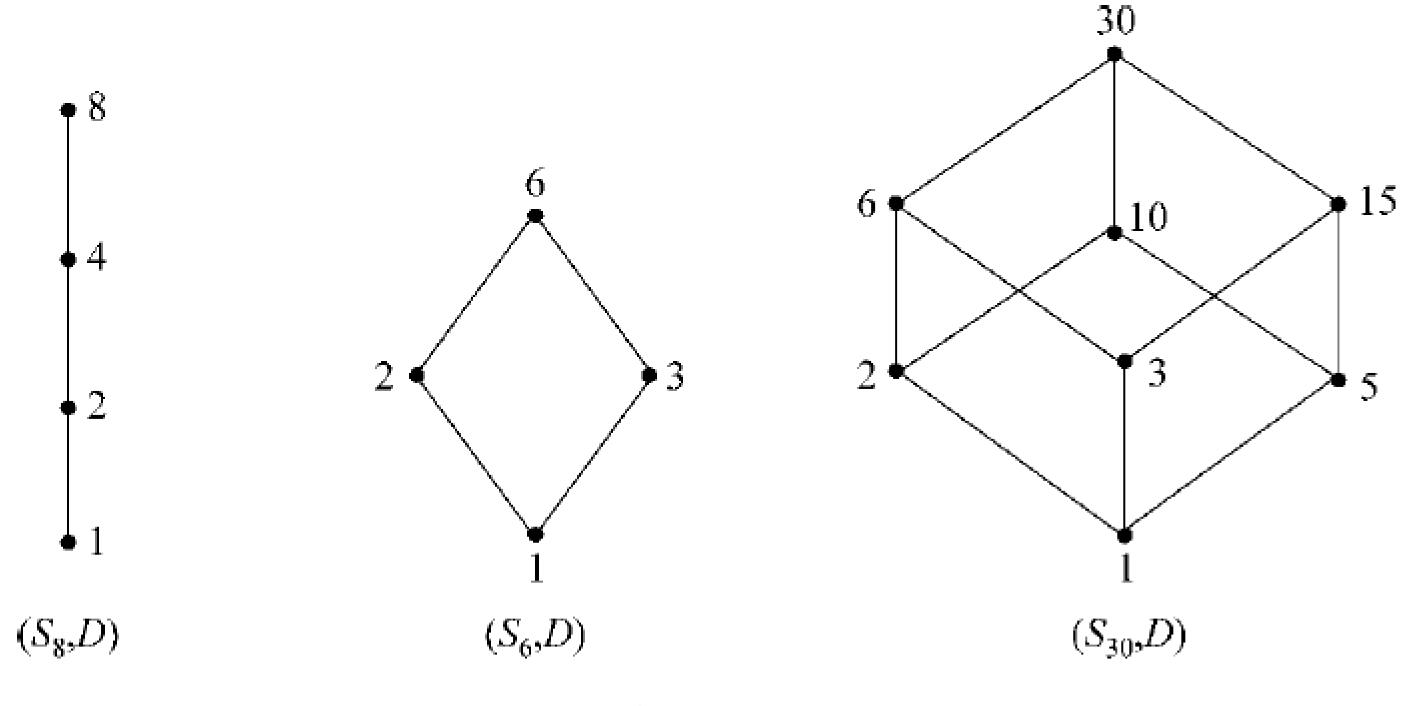


图 6.1.1

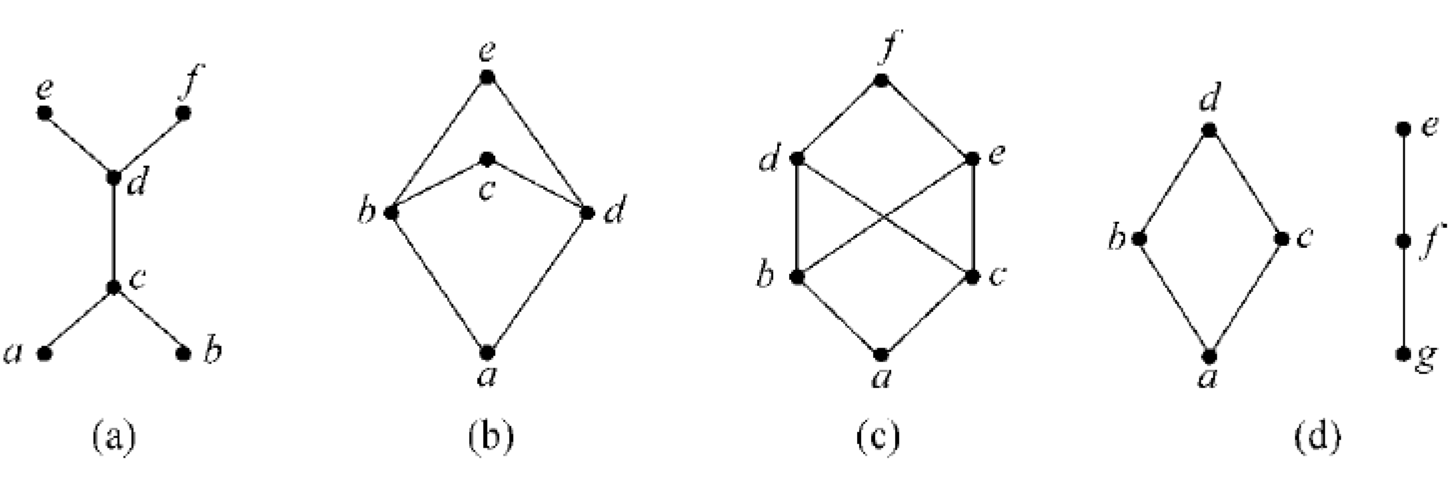


图 6.1.2

(3) 都不是格. (a)中的$\{a,b\}$没有最大下界. (b) 中的 $\{b,d\}$ 有两个上界 c 和 e,但没有最小上界. (c)中的$\{b,c\}$有三个上界 d,e 和 f,但没有最小上界. (d) 中的 $\{a,g\}$ 没有最大下界.

根据偏序集的性质不难证明格的重要性质,即格的对偶原理.

定义 6.1.2 设 f 是含有格中的元素以及符号$=$,$\leqslant$,$\geqslant$,$\vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 $\leqslant,\geqslant,\vee,\wedge$ 分别替换成 $\geqslant,\leqslant,\wedge,\vee$ 所得的命题,称 f^* 为 f 的**对偶命题**.

例 6.1.3 在格中 f 是 $(a\wedge b)\vee c\leqslant c$,则 f^* 是

$$(a \vee b) \wedge c \geqslant c.$$

定理 6.1.1(格的对偶原理) 设 f 是含有格中的元素及符号$=,\leqslant,\geqslant,\vee,\wedge$ 的命题. 若 f 对一切格为真,则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

例 6.1.4 若对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\quad a \wedge b \leqslant a,$$

那么对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\quad a \vee b \geqslant a.$$

许多格的性质都是互为对偶命题的,有了格的对偶原理,在证明格的性质时,只需证明其中的一个命题就可以了.

定理 6.1.2 设$\langle L,\leqslant\rangle$是格,则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 适合交换律、结合律、幂等律和吸收律,即

(1) $\forall a,b\in L$ 有

$$a \vee b = b \vee a,\quad a \wedge b = b \wedge a.$$

(2) $\forall a,b,c\in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

(4) $\forall a, b \in L$ 有

$$a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

证明 (1) $a \vee b$ 和 $b \vee a$ 分别是 $\{a, b\}$ 的最小上界和 $\{b, a\}$ 的最小上界. 由于 $\{a, b\} = \{b, a\}$, 所以 $a \vee b = b \vee a$.

由对偶原理, $a \wedge b = b \wedge a$ 得证.

(2) 由最小上界的定义有

$$(a \vee b) \vee c \geqslant a \vee b \geqslant a, \tag{6.1.1}$$

$$(a \vee b) \vee c \geqslant a \vee b \geqslant b, \tag{6.1.2}$$

$$(a \vee b) \vee c \geqslant c. \tag{6.1.3}$$

由式(6.1.2)和式(6.1.3)有

$$(a \vee b) \vee c \geqslant b \vee c. \tag{6.1.4}$$

由式(6.1.1)和式(6.1.4)有

$$(a \vee b) \vee c \geqslant a \vee (b \vee c).$$

同理可证

$$(a \vee b) \vee c \leqslant a \vee (b \vee c).$$

根据偏序关系的反对称性有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

由对偶原理, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ 显然成立.

(3) 显然 $a \leqslant a \vee a$. 又由 $a \leqslant a$ 可得 $a \vee a \leqslant a$, 根据反对称性有

$$a \vee a = a.$$

由对偶原理, $a \wedge a = a$ 得证.

(4) 显然

$$a \vee (a \wedge b) \geqslant a. \tag{6.1.5}$$

又由 $a \leqslant a, a \wedge b \leqslant a$ 可得

$$a \vee (a \wedge b) \leqslant a. \tag{6.1.6}$$

由式(6.1.5)和式(6.1.6), 结合偏序关系的反对称性可得

$$a \vee (a \wedge b) = a.$$

根据对偶原理, $a \wedge (a \vee b) = a$.

由定理 6.1.2 可知, 格是具有两个二元运算的代数系统 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, 其中运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别满足交换律、结合律、幂等律和吸收律. 那么能不能像群一样, 通过规定运算及其基本性质来给出格的定义呢? 下面从代数系统角度给出格的定义.

定理 6.1.3 设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有二元运算的代数系统, 且对于 $*$ 和 $\circ$ 运算适合交换律、结合律、吸收律, 则可以适当定义 S 中的偏序 $\leqslant$, 使得 $\langle S, \leqslant \rangle$ 构成一个格, 且 $\forall a, b \in S$ 有 $a \wedge b = a * b, a \vee b = a \circ b$.

证明 (1) 先证在 S 中 $*$ 和 $\circ$ 运算都适合幂等律.

$\forall a \in S$, 由吸收律得

$$a * a = a * (a \circ (a * a)) = a.$$

同理有

$$a \circ a = a.$$

（2）在 S 上定义二元关系 R，$\forall a,b \in S$ 有

$$\langle a,b\rangle \in R \Leftrightarrow a \circ b = b.$$

下面证明 R 是 S 上的偏序.

根据幂等律，$\forall a \in S$ 都有 $a \circ a = a$，即 $\langle a,a\rangle \in R$，所以 R 在 S 上是自反的.

$\forall a,b \in S$，$\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle b,a\rangle \in R$，下证 $a=b$.

由偏序关系的定义

$$\langle a,b\rangle \in R \Leftrightarrow a \circ b = b,$$
$$\langle b,a\rangle \in R \Leftrightarrow b \circ a = a.$$

由 $\circ$ 运算适合交换律，从而有 $a=b$. 这就证明了 R 在 S 上是反对称的.

$\forall a,b,c \in S$，$\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle b,c\rangle \in R$，下证 $\langle a,c\rangle \in R$.

由偏序关系的定义

$$\langle a,b\rangle \in R \Leftrightarrow a \circ b = b,$$
$$\langle b,c\rangle \in R \Leftrightarrow b \circ c = c.$$

则

$$a \circ c = a \circ (b \circ c).$$

由已知 $\circ$ 运算满足结合律，故有 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$，即 $a \circ c = c$. 这说明 $\langle a,c\rangle \in R$. 这就证明了 R 在 S 上是传递的.

综上所述，R 为 S 上的偏序关系，以下把关系 R 记作 $\leqslant$.

（3）证明 $\langle S,\leqslant\rangle$ 构成格.

$\forall a,b \in S$ 有

$$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b,$$
$$b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b.$$

于是有 $a \leqslant a \circ b$ 和 $b \leqslant a \circ b$. 因此 $a \circ b$ 是 $\{a,b\}$ 的上界.

假设 c 是 $\{a,b\}$ 的任一个上界，则有 $a \circ c = c$ 和 $b \circ c = c$，从而有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c,$$

因此 $a \circ b \leqslant c$，所以 $a \circ b$ 是 $\{a,b\}$ 的最小上界，即 $a \vee b = a \circ b$.

下面证明 $a * b$ 是 $\{a,b\}$ 的最大下界. 首先证

$$a \circ b = b \Leftrightarrow a * b = a. \tag{6.1.7}$$

由 $a \circ b = b$ 知

$$a * b = a * (a \circ b) = a.$$

而由 $a * b = a$ 知

$$a \circ b = (a * b) \circ b = b \circ (b * a) = b.$$

故式(6.1.7)得证.

由式(6.1.7)有 $a \leqslant b \Leftrightarrow a * b = a$.

$\forall a,b \in S$，

$$(a * b) * a = a * (a * b) = (a * a) * b = a * b,$$
$$(a * b) * b = a * (b * b) = a * b.$$

这推出 $a*b\leqslant a, a*b\leqslant b$. 因此 $a*b$ 是 $\{a,b\}$ 的下界.

假设 c 是 $\{a,b\}$ 的任一个下界,则有 $a*c=c, b*c=c$,从而

$$(a*b)*c=a*(b*c)=a*c=c.$$

由此可证 $a*b$ 是 $\{a,b\}$ 的最大下界,即 $a\wedge b=a*b$.

根据定理 6.1.3,可以给出格的另一个等价定义.

定义 6.1.3 设 $\langle S,*,\circ\rangle$ 是代数系统,$*$ 和 $\circ$ 满足交换律、结合律、吸收律,则 $\langle S,*,\circ\rangle$ 构成一个**格**.

注意到格中运算满足四条算律,但幂等律可以由吸收律推出(见定理 6.1.3 证明(1)),所以上述定义中只需满足三条算律即可.

以后我们不再区别是偏序集定义的格,还是代数系统定义的格,而统称为格 L. 下面继续考虑格的性质.

定理 6.1.4 设 L 是格,则 $\forall a,b\in L$ 有

$$a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b.$$

证明 先证 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b=b$.

由 $a\leqslant a$ 和 $a\leqslant b$ 可知 a 是 $\{a,b\}$ 的下界,故 $a\leqslant a\wedge b$. 显然又有 $a\wedge b\leqslant a$. 根据偏序关系的反对称性得 $a\wedge b=a$.

再证 $a\wedge b=a\Rightarrow a\vee b=b$. 根据吸收律有

$$b=b\vee(b\wedge a).$$

由 $a\wedge b=a$ 得 $b=b\vee a$,即 $a\vee b=b$.

最后证 $a\vee b=b\Rightarrow a\leqslant b$. 由 $a\leqslant a\vee b$ 得

$$a\leqslant a\vee b=b.$$

定理 6.1.5 设 L 是格, $\forall a,b,c,d\in L$,若 $a\leqslant b$ 且 $c\leqslant d$,则

$$a\wedge c\leqslant b\wedge d,\quad a\vee c\leqslant b\vee d.$$

证明 $a\wedge c\leqslant a\leqslant b, a\wedge c\leqslant c\leqslant d$,因此 $a\wedge c\leqslant b\wedge d$.

同理可证 $a\vee c\leqslant b\vee d$.

例 6.1.5 设 L 是格,证明 $\forall a,b,c\in L$ 有

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

证明 由 $a\leqslant a, b\wedge c\leqslant b$ 得

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee b.$$

由 $a\leqslant a, b\wedge c\leqslant c$ 得

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee c.$$

从而得到

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

例 6.1.5 说明在格中分配不等式成立. 一般地,格中的 $\vee$ 和 $\wedge$ 运算并不是互相满足分配律的.

下面考虑格的子代数.

定义 6.1.4 设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格, S 是 L 的非空子集,若 S 关于 L 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 仍构成格,则称 S 是 L 的子格.

注 (1) 如果 $\langle S,\leqslant\rangle$ 是格,那么 S 的非空子集未必是格.

(2) 如果$\langle S,\leqslant\rangle$是格,即便 S 的非空子集是格,也未必是 S 的子格.

例 6.1.6 设格 L 如图 6.1.3 所示. 令 $S_1=\{a,e,f,g\}$和 $S_2=\{a,b,e,g\}$,则 S_1不是 L 的子格, S_2是 L 的子格. 因为对 e 和 f,有 $e\wedge f=c$,但 $c\notin S_1$.

例 6.1.7 设 S_{30}表示 30 的正整数因子构成的集合,D 表示整除关系,其哈斯图如图 6.1.4 所示. 考虑其子集 $\{30,2,3,1\}$,因为 $\{2,3\}$ 在$\langle S_{30},D\rangle$中的上确界为 6,而不是 30. 所以$\langle\{30,2,3,1\},D\rangle$虽是一个格,但不是$\langle S_{30},D\rangle$的子格. 而 S_{30}的子集 $\{1,2,5,10\}$, $\{2,5\}$ 的上确界与在$\langle S_{30},D\rangle$中的上确界完全相同. 故$\langle\{1,2,5,10\},D\rangle$是$\langle S_{30},D\rangle$的子格.

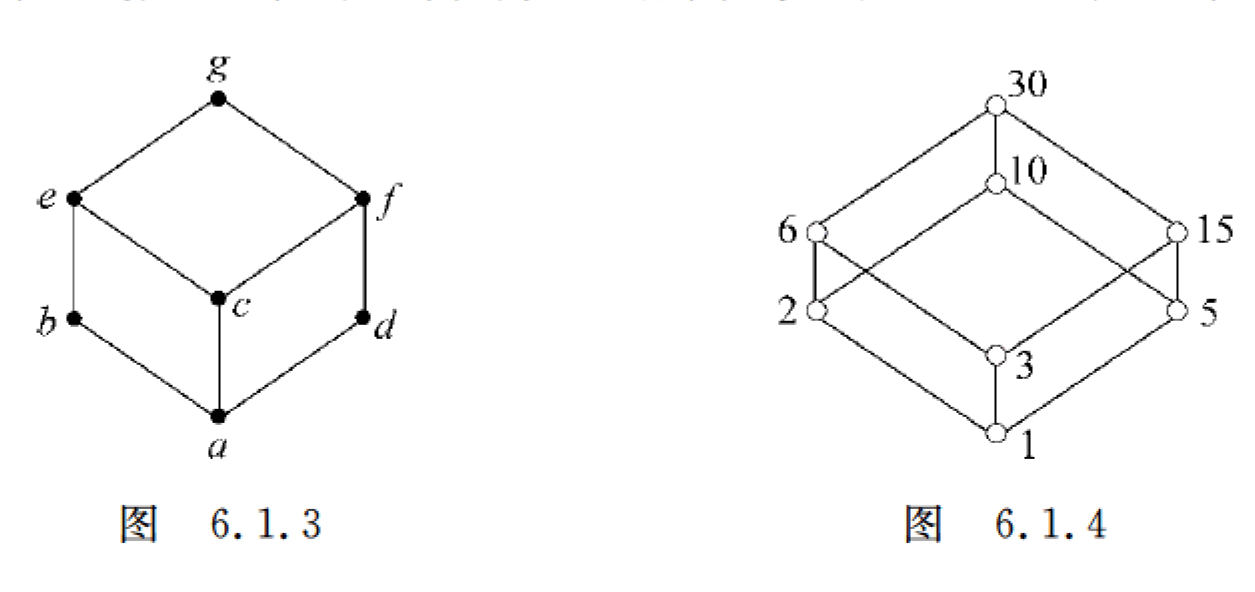


图 6.1.3　　　图 6.1.4

6.2 分配格与有补格

前面讨论了在任意一个格中,都有格分配不等式成立,见例 6.1.5. 特别地,如果 $\forall a,b,c\in L$ 有

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),$$

则该格是一种特殊的格——分配格. 下面给出分配格定义.

定义 6.2.1 设$\langle L,\wedge,\vee\rangle$是格,若 $\forall a,b,c\in L$,有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

成立,则称 L 为**分配格**.

不难证明,以上两个等式中只要成立一个,另一个也一定成立.

例 6.2.1 参见图 6.2.1.

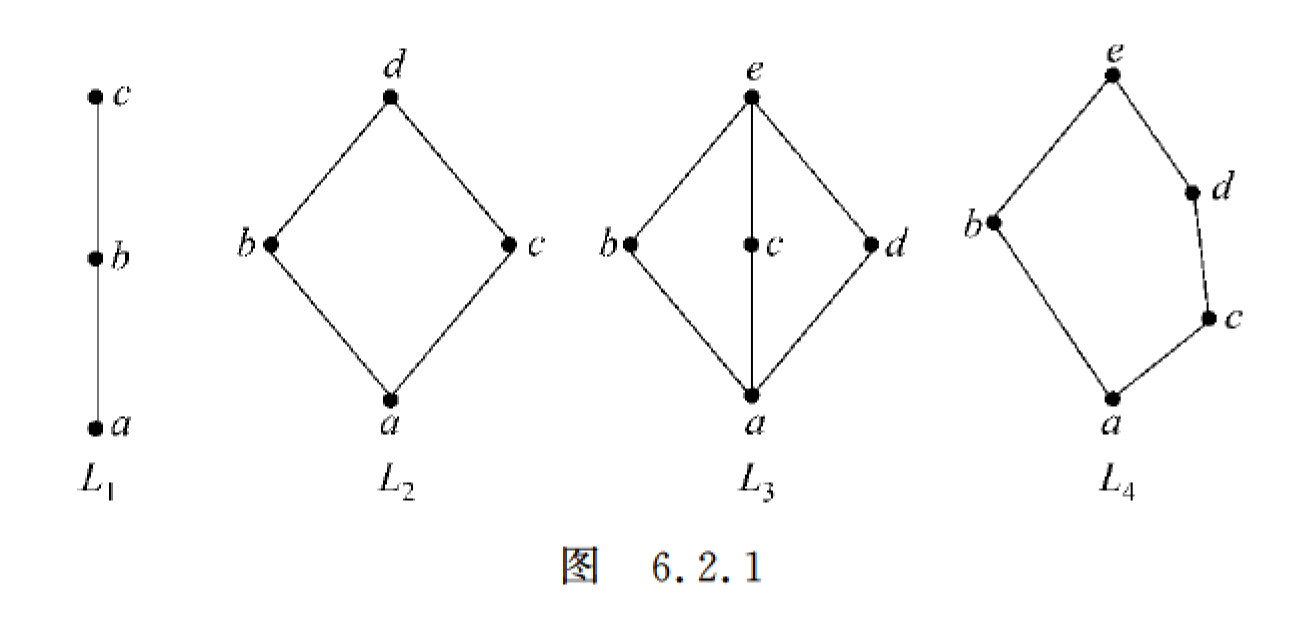


图 6.2.1

L_1 和 L_2 是分配格, L_3和 L_4不是分配格. 在 L_3中,有

$$b\wedge(c\vee d)=b\wedge e=b,$$
$$(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=a\vee a=a.$$

而在 L_4 中,有

$$c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c,$$
$$(c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge d = d.$$

称 L_3 为钻石格，L_4 为五角格.

按照分配格定义判断一个格是否为分配格，非常复杂，为了给出更为简单的判断方法，下面给出格同态定义. 同态是代数系统的重要性质，对于格也是如此.

定义 6.2.2 设 L_1 和 L_2 是格，映射 $\varphi: L_1 \to L_2$，$\forall\ a,b \in L_1$，有

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b),$$
$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b),$$

则称 φ 为格 L_1 到 L_2 的同态映射，简称**格同态**.

若 φ 为格 L_1 到 L_2 的同态映射且 φ 是双射，称 φ 是同构映射，简称格同构.

例 6.2.2 设 $L_1=\{2n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$，$L_2=\{2n+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$，则 L_1 和 L_2 关于数的小于或等于关系构成格. 令

$$\varphi: L_1 \to L_2, \quad \varphi(x) = x-1,$$

容易验证 φ 是 L_1 到 L_2 的同态映射.

事实上 $\forall\, x,y\in L_1$，有

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(\max\{x,y\}) = \max\{x,y\}-1,$$
$$\varphi(x) \vee \varphi(y) = (x-1) \vee (y-1) = \max\{x-1,y-1\} = \max\{x,y\}-1.$$

因此有

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$
$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(\min\{x,y\}) = \min\{x,y\}-1,$$
$$\varphi(x) \wedge \varphi(y) = (x-1) \wedge (y-1) = \min\{x-1,y-1\} = \min\{x,y\}-1.$$

因此有

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

综上，φ 是同态映射.

例 6.2.3 设 $A=\langle\{a,b,c\},\leqslant\rangle$，$B=\langle P(\{a,b,c\}),\leqslant\rangle$，其哈斯图如图 6.2.2 所示.

证明 构造函数 $f: \{a,b,c\}\to P(\{a,b,c\})$，

$$f(x) = \{y \mid y \leqslant x\}.$$

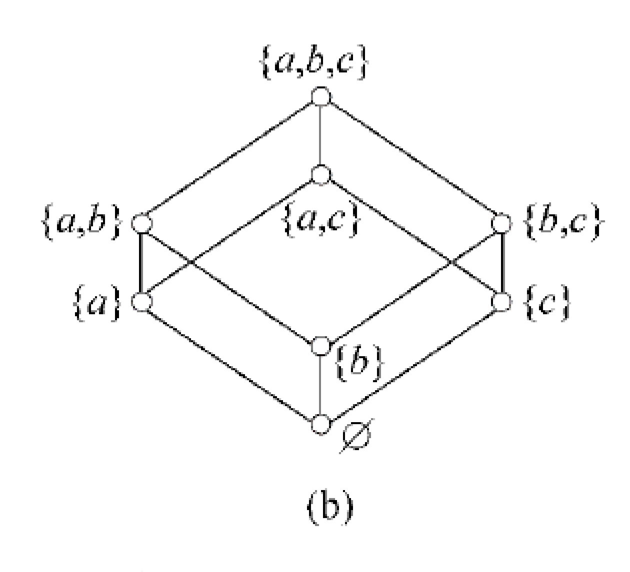


图 6.2.2

因为

$$f(x_1 \wedge x_2)=f(\min\{x_1,x_2\})=\{y \mid y\leqslant \min\{x_1,x_2\}\}=\{y \mid y\leqslant x_1\}\cap\{y \mid y\leqslant x_2\}=f(x_1)\cap f(x_2),$$
$$f(x_1 \vee x_2)=f(\max\{x_1,x_2\})=\{y \mid y\leqslant \max\{x_1,x_2\}\}=\{y \mid y\leqslant x_1\}\cup\{y \mid y\leqslant x_2\}=f(x_1)\cup f(x_2).$$

所以 f 是 A 到 B 的一个格同态.

例 6.2.4 具有 3 个元的格只能同构于三个元素的链，如图 6.2.3 所示.

例 6.2.5 具有 4 个元的格只能同构于图 6.2.4 中的两种情况.

换句话说，四个元素的格只有这两种哈斯图结构，其他的结构不是格.

例 6.2.6 具有 5 个元的格只能同构于图 6.2.5 中五种情形之一的结构.

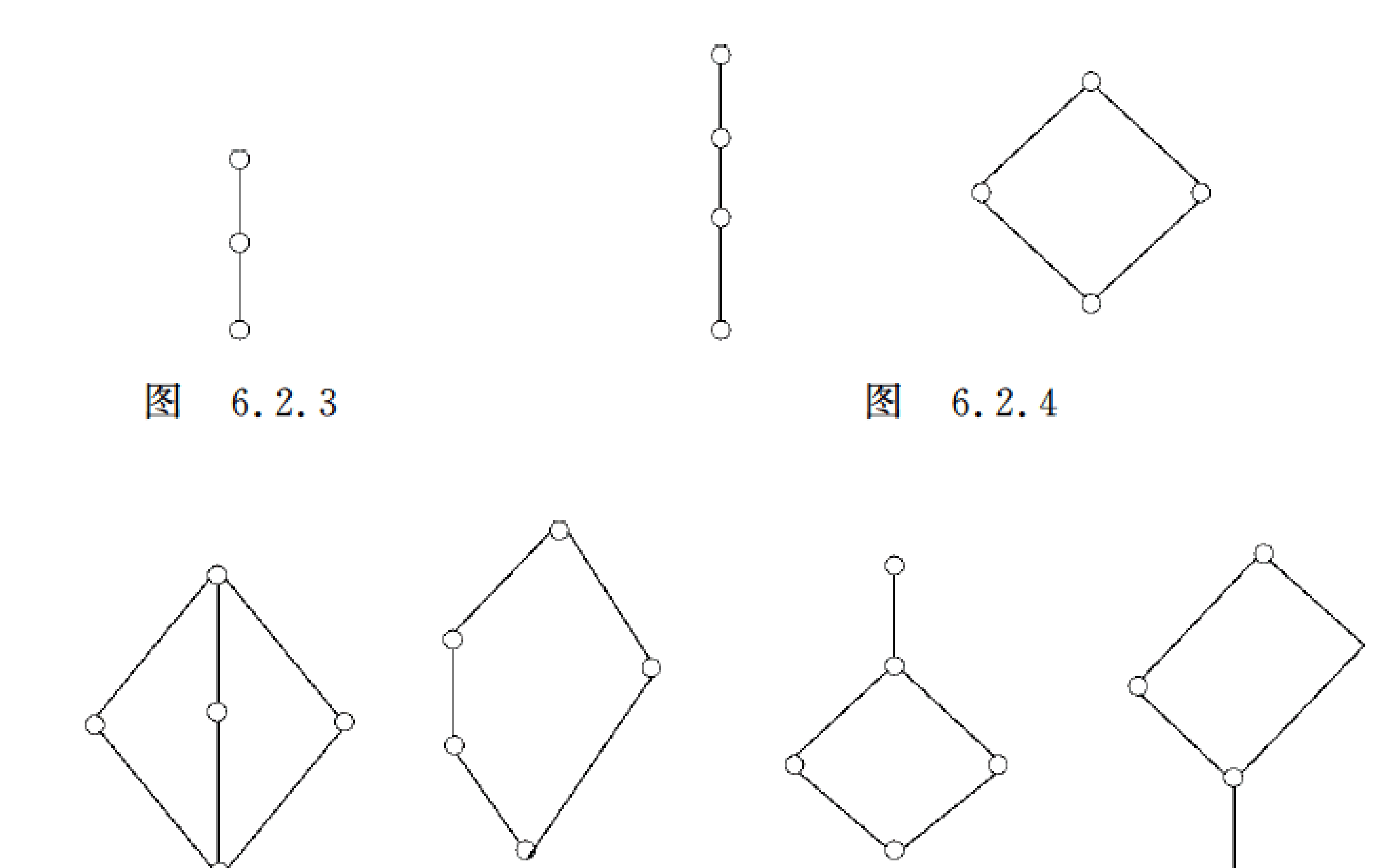


图 6.2.3

图 6.2.4

图 6.2.5

关于格同态有下列性质.

定理 6.2.1(保序性) 设 φ 是格 L_1 到格 L_2 的映射.

(1) 若 φ 是格同态映射,则 φ 是保序映射,即 $\forall\ x,y \in L_1$,有

$$x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y);$$

(2) 若 φ 是双射,则 φ 是格同构映射,当且仅当 $\forall x,y \in L_1$,有

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y).$$

证明 (1) 对任意 $x,y \in L_1$,设 $x \leqslant y$,由定理 6.1.4 知 $x \vee y = y$,由于 φ 是格同态映射,于是有

$$\varphi(y) = \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y),$$

因此 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$.

(2) 充分性 只需证明 φ 是 L_1 到 L_2 的同态映射即可.

任取 $x,y \in L_1$,令 $x \vee y = z$,由 $x \leqslant z, y \leqslant z$ 知

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(z), \quad \varphi(y) \leqslant \varphi(z),$$

从而 $\varphi(x) \vee \varphi(y) \leqslant \varphi(z) = \varphi(x \vee y)$.

另一方面,由 $\varphi(x) \vee \varphi(y) \in L_2$ 和 φ 是满射知,必存在 $v \in L_1$ 使

$$\varphi(v) = \varphi(x) \vee \varphi(y),$$

因此有

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(v), \quad \varphi(y) \leqslant \varphi(v).$$

由条件得 $x \leqslant v$ 和 $y \leqslant v$,从而

$$x \vee y \leqslant v.$$

再应用已知条件,有

$$\varphi(x \vee y) \leqslant \varphi(v) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

综上有 $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$.

同理可证 $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

故 φ 是 L_1 到 L_2 的同态映射.

必要性 由(1)有

$$x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y).$$

反之,若 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$,因为 φ 是同构映射,则

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) = \varphi(y).$$

由于 φ 是双射,必有 $x \vee y = y$,于是 $x \leqslant y$.

注 定理 6.2.1 中的(1)告诉我们,格同态是保序的,但定理 6.2.1 的逆命题不一定成立.如下例所述.

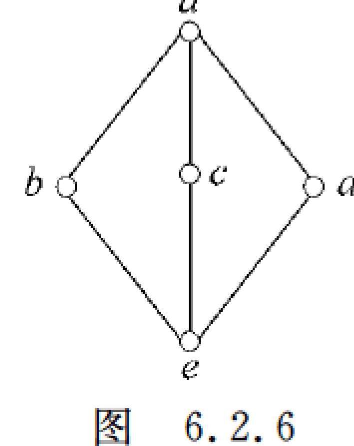


图 6.2.6

例 6.2.7 设 $\langle S, \leqslant \rangle$ 是一个格,其中 $S=\{a,b,c,d,e\}$,如图 6.2.6 所示.

$P(S)$ 是集合 S 的幂集,显然 $\langle P(S), \subseteq \rangle$ 也是一个格,作映射 $f: S \to P(S)$,对任一 $x \in S$,定义

$$f(x) = \{y \mid y \in S, y \leqslant x\},$$

即有

$$f(a) = S, \quad f(b) = \{b,e\}, \quad f(c) = \{c,e\}, \quad f(d) = \{d,e\}, \quad f(e) = \{e\}.$$

显然,当 $x, y \in S$ 且 $x \leqslant y$ 时,有 $f(x) \subseteq f(y)$,所以映射 f 是保序的.但是,对于 $b, d \in S$,我们有

$$b \vee d = a, \quad f(b \vee d) = f(a) = S,$$

但是 $f(b) \cup f(d) = \{b,d,e\}$,从而有

$$f(b \vee d) \neq f(b) \cup f(d).$$

定义 6.2.3 设 L_1 和 L_2 是格,如下定义 $L_1 \times L_2$ 上的二元运算 $\cap, \cup$,即 $\forall (a_1,b_1), (a_2,b_2) \in L_1 \times L_2$,有

$$(a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2), \quad (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2),$$

则称 $\langle L_1 \times L_2, \cap, \cup \rangle$ 为格 L_1 和 L_2 的**直积**.

定理 6.2.2 定义 6.2.3 中定义的直积 $\langle L_1 \times L_2, \cap, \cup \rangle$ 是格.

证明 $\forall (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3) \in L_1 \times L_2$,对于 $\cap$ 运算有

$$\begin{aligned}(a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) &= (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \\ &= (a_2 \wedge a_1, b_2 \wedge b_1) = (a_2,b_2) \cap (a_1,b_1),\end{aligned}$$

即 $\cap$ 运算满足交换律.

$$\begin{aligned}&((a_1,b_1) \cap (a_2,b_2)) \cap (a_3,b_3) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \cap (a_3,b_3) \\ &= ((a_1 \wedge a_2) \wedge a_3, (b_1 \wedge b_2) \wedge b_3) = (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3, b_1 \wedge b_2 \wedge b_3) \\ &= (a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3), b_1 \wedge (b_2 \wedge b_3)) = (a_1,b_1) \cap (a_2 \wedge a_3, b_2 \wedge b_3) \\ &= (a_1,b_1) \cap ((a_2,b_2) \cap (a_3,b_3)),\end{aligned}$$

即 $\cap$ 运算满足结合律.

同理可证 $\cup$ 也满足交换律和结合律.

又

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1) \cap ((a_1,b_1) \cup (a_2,b_2)) = (a_1,b_1) \cap (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \\ &= (a_1 \wedge (a_1 \vee a_2), b_1 \wedge (b_1 \vee b_2)) = (a_1,b_1).\end{aligned}$$

同理有

$$(a_1,b_1)\cup((a_1,b_1)\cap(a_2,b_2))=(a_1,b_1).$$

即证明了 $\cap,\cup$ 运算满足吸收律.因此由格定义代数系统$\langle L_1\times L_2,\cap,\cup\rangle$是格.

定理 6.2.3 设 L_1和 L_2是格,则 L_1 与$\langle L_1\times L_2,\cap,\cup\rangle$的一个子格同构.

证明 设 b 是 L_2中一个固定元,令 $S_b=\{(a,b)\mid a\in L_1\}$,$S_b$显然是子格.

定义 φ: $L_1\to S_b$, $\forall a\in L_1$,$\varphi(a)=(a,b)$. 易见 φ 是 L_1到 S_b的一一对应. 又 $\forall a_1,a_2\in L_1$,有

$$\varphi(a_1\vee a_2)=(a_1\vee a_2,b)=(a_1,b)\cup(a_2,b)=\varphi(a_1)\cup\varphi(a_2),$$
$$\varphi(a_1\wedge a_2)=(a_1\wedge a_2,b)=(a_1,b)\cap(a_2,b)=\varphi(a_1)\cap\varphi(a_2),$$

所以,$\langle L_1,\wedge,\vee\rangle\cong\langle S_b,\cap,\cup\rangle$.

下面给出一个格是分配格的充分必要条件.

定理 6.2.4 设 L是格,则 L是分配格当且仅当 L中不含有与钻石格或五角格同构的子格.

由于该定理的证明比较烦琐,故略去,读者只要掌握它的应用就行了.

推论 (1) 小于五元的格都是分配格.

(2) 任何一条链都是分配格.

例 6.2.8 说明图 6.2.7 中的格是否为分配格,为什么?

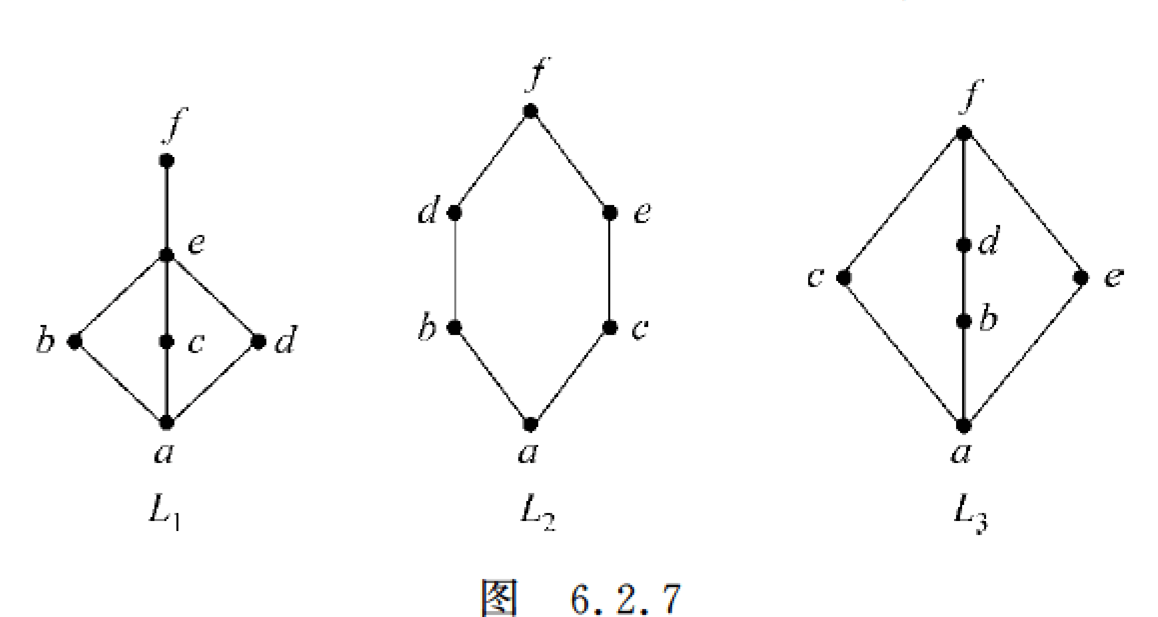


图 6.2.7

解 L_1,L_2和 L_3都不是分配格,因为 $\{a,b,c,d,e\}$ 是 L_1的子格,并且同构于钻石格, $\{a,b,c,e,f\}$ 是 L_2的子格,并且同构于五角格. $\{a,c,b,e,f\}$ 是 L_3的子格,也同构于钻石格.

下面考虑另一种特殊的格——有补格.先引入有界格的概念.

定义 6.2.4 设 L是格,若存在 $a\in L$ 使得 $\forall x\in L$ 有 $a\leqslant x$,则称 a 为 L 的**全下界**. 若存在 $b\in L$ 使得 $\forall x\in L$ 有 $x\leqslant b$,则称 b 为 L 的**全上界**.

注 格 L 若存在全下界或全上界,则全下界或全上界一定是唯一的.

假若 a_1 和 a_2都是格 L 的全下界,则有 $a_1\leqslant a_2$和 $a_2\leqslant a_1$. 根据偏序关系 $\leqslant$ 的反对称性,必有 $a_1=a_2$. 故全下界唯一. 同理可证全上界唯一.

由于全下界和全上界的唯一性,一般将格 L 的全下界记为 0,全上界记为 1.

定义 6.2.5 设是 L 格,若 L 存在全下界和全上界,则称 L 为**有界格**,并将 L 记为 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$.

注 有限格 L 一定是有界格.

设 L 是 n 元格,且 $L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,那么 $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$就是 L 的全下界,而

$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$就是 L 的全上界.因此 L 是有界格.

对于无限格 L 来说,有的是有界格,有的不是有界格.如集合 B 的幂集格$\langle P(B), \cap, \cup \rangle$,不管 B 是有限集还是无限集,它都是有界格.它的全下界是空集$\varnothing$,全上界是 B.而整数集$\mathbb{Z}$关于通常数的小于或等于关系$\leqslant$构成的格不是有界格,因为不存在最小和最大的整数.

不难看出,在有界格中,全下界 0 是关于$\wedge$运算的零元,$\vee$ 运算的单位元.而全上界 1 是关于$\vee$运算的零元,$\wedge$ 运算的单位元,即有如下定理.

定理 6.2.5　设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$是有界格,则$\forall a \in L$,有

$$a \wedge 0 = 0,\quad a \vee 0 = a,\quad a \wedge 1 = a,\quad a \vee 1 = 1.$$

证明留作练习,读者自证.

对于涉及有界格的命题,如果其中含有全下界 0 或全上界 1,在求该命题的对偶命题时,必须将 0 替换成 1,而将 1 替换成 0.

下面定义有界格中的补元和有补格.

定义 6.2.6　设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$是有界格,$a \in L$,若存在 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0 \quad 和 \quad a \vee b = 1$$

成立,则称 b 是 a 的补元.

由这个定义不难看出,若 b 是 a 的补元,那么 a 也是 b 的补元.换句话说,a 和 b 互为补元.

例 6.2.9　考虑图 6.2.1 中的四个格.

L_1中的 a 与 c 互为补元,其中 a 为全下界,c 为全上界,b 没有补元.

L_2中的 a 与 d 互为补元,其中 a 为全下界,d 为全上界,b 与 c 也互为补元.

L_3中的 a 与 e 互为补元,其中 a 为全下界,e 为全上界,b 的补元是 c 和 d,c 的补元是 b 和 d,d 的补元是 b 和 c.b,c,d 每个元素都有两个补元.

L_4中的 a 与 e 互为补元,其中 a 为全下界,e 为全上界,b 的补元是 c 和 d,c 的补元是 b,d 的补元是 b.

不难证明,在任何有界格中,全下界 0 与全上界 1 总是互补的.而对于其他的元素,可能存在补元,也可能不存在补元.如果存在补元,可能是唯一的,也可能是多个补元.但对于有界分配格,如果它的元素存在补元,则一定是唯一的.

定理 6.2.6　设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$是有界分配格,若 $a \in L$,且对于 a 存在补元 b,则 b 是 a 的唯一补元.

证明　假设 $c \in L$ 也是 a 的补元,则有 $a \vee c = 1$ 和 $a \wedge c = 0$.又知 b 是 a 的补元,也有 $a \vee b = 1$ 和 $a \wedge b = 0$,从而得到

$$a \vee c = a \vee b,\quad a \wedge c = a \wedge b.$$

由于 L 是分配格,从而有

$$\begin{aligned} b &= b \wedge (b \vee a) = b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee (b \wedge a) \\ &= (b \wedge c) \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge c = (a \vee c) \wedge c = c. \end{aligned}$$

定义 6.2.7　设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$是有界格,若 $\forall a \in L$,在 L 中都有 a 的补元存在,则称 L 是**有补格**.

例如图 6.2.1 中的 L_2,L_3和 L_4是有补格,L_1不是有补格,图 6.2.2 中的 L_2和 L_3是有补格,L_1不是有补格,因为 b,c,d,e 都不存在补元.

6.3 布 尔 代 数

一个非空集合 S 的幂集 $P(S)$，$\langle P(S),\subseteq\rangle$作为一个格，在前面多次提到过. 本节中，我们引进布尔代数，并证明：任何一个有限的布尔代数必定与一个格$\langle P(S),\subseteq\rangle$所诱导的代数系统同构.

定义 6.3.1 如果一个格既是有补格又是分配格，则称它为**布尔格**或**布尔代数**.

根据定理 6.2.6，在分配格中如果一个元素存在补元，则是唯一的. 因此，在布尔代数中，每个元素都存在着唯一的补元，可以把求补元的运算看做是布尔代数中的一元运算. 从而可以把一个布尔代数标记为 $\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$，其中 $\wedge,\vee,0,1$ 和有界格一样，$'$为求补运算，$\forall a\in B$，a' 是 a 的补元.

例 6.3.1 （1）设 $S_{110}=\{1,2,5,10,11,22,55,110\}$是 110 的正因子集合. 令 gcd，lcm 分别表示两个数的最大公约数和最小公倍数的运算. 则$\langle S_{110},\text{gcd},\text{lcm}\rangle$构成布尔代数.

（2）设 B 为任意集合，可以证明 B 的幂集格$\langle P(B),\cup,\cap,\sim,\varnothing,B\rangle$构成布尔代数，称为集合代数.

（3）数理逻辑中的命题代数是布尔代数.

（4）数字电路中的逻辑代数也是布尔代数.

下面考虑布尔代数的性质.

定理 6.3.1 设$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$是布尔代数，则：

（1）$\forall a\in B$，$(a')'=a$. （双重否定律）

（2）$\forall a,b\in B$，$(a\wedge b)'=a'\vee b'$，$(a\vee b)'=a'\wedge b'$. （德摩根律）

证明 $(a')'$是 a'的补元，a 也是 a'的补元，由补元的唯一性得$(a')'=a$.

现证明(2)，对任意 $a,b\in B$ 有

$$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')$$
$$=(1\vee b')\wedge(a'\vee 1)=1\wedge 1=1$$
$$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')$$
$$=(0\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0\vee 0=0.$$

所以 $a'\vee b'$是 $a\wedge b$ 的补元，根据补元的唯一性有

$$(a\wedge b)'=a'\vee b'.$$

同理可证$(a\vee b)'=a'\wedge b'$.

由定理 6.3.1 知，命题代数和集合代数的双重否定律与德摩根律实际上是这个定理的特例. 可以证明德摩根律对有限个元素也是正确的.

布尔代数中各条算律不是彼此独立的，下面的定义告诉我们，只需验证交换律、分配律、同一律和补元律就可以证明一个代数系统是布尔代数了.

定义 6.3.2 设$\langle B,*,\circ\rangle$是代数系统，$*$ 和$\circ$是二元运算. 若 $*$ 和$\circ$运算满足：

（1）交换律，即 $\forall a,b\in B$ 有

$$a*b=b*a,\quad a\circ b=b\circ a;$$

（2）分配律，即$\forall a,b,c\in B$ 有

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c),\quad a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c);$$

(3) 同一律,即存在 $0,1\in B$,使得 $\forall a\in B$ 有

$$a*1=a,\quad a\circ 0=a;$$

(4) 补元律,即 $\forall a\in B$,存在 $a'\in B$ 使得

$$a*a'=0,\quad a\circ a'=1.$$

则称 $\langle B,*,\circ\rangle$ 是一个**布尔代数**.

证明 以上定义中的同一律说明,1 是 $*$ 的单位元,0 是 $\circ$ 运算的单位元,可以证明 1 和 0 分别也是 $\circ$ 和 $*$ 运算的零元. $\forall a\in B$,有

$$\begin{aligned}a\circ 1&=(a\circ 1)*1 &&(\text{同一律})\\&=1*(a\circ 1) &&(\text{交换律})\\&=(a\circ a')*(a\circ 1) &&(\text{补元律})\\&=a\circ(a'*1) &&(\text{分配律})\\&=a\circ a' &&(\text{同一律})\\&=1. &&(\text{补元律})\end{aligned}$$

同理可证 $a*0=0$.

为证以上定义的 $\langle B,*,\circ\rangle$ 是布尔代数,验证代数系统 $\langle B,*,\circ\rangle$ 是一个格,即证明 $*$ 和 $\circ$ 运算满足结合律和吸收律.

先证吸收律,$\forall a,b\in B$ 有

$$\begin{aligned}a\circ(a*b)&=(a*1)\circ(a*b) &&(\text{同一律})\\&=a*(1\circ b) &&(\text{分配律})\\&=a*1 &&(1\text{ 是}\circ\text{运算的零元})\\&=a. &&(\text{同一律})\end{aligned}$$

同理有 $a*(a\circ b)=a$,吸收律成立.

为证结合律,先证以下命题:

$$\forall a,b,c\in B,\quad a\circ b=a\circ c\quad\text{且}\quad a'\circ b=a'\circ c\Rightarrow b=c.$$

事实上,由 $a\circ b=a\circ c$ 和 $a'\circ b=a'\circ c$ 可得

$$(a\circ b)*(a'\circ b)=(a\circ c)*(a'\circ c).$$

由分配律和交换律得

$$(a*a')\circ b=(a*a')\circ c.$$

由补元律得

$$0\circ b=0\circ c.$$

由同一律和交换律得

$$b=c.$$

应用这个命题,为证 $(a*b)*c=a*(b*c)$,只需证明

(1) $a\circ((a*b)*c)=a\circ(a*(b*c))$, (6.3.1)

(2) $a'\circ((a*b)*c)=a'\circ(a*(b*c))$. (6.3.2)

首先证式(6.3.1). 由吸收律有

$$\begin{aligned}&a=a\circ(a*(b*c)),\\&a\circ((a*b)*c)=(a\circ(a*b))*(a\circ c) &&(\text{分配律})\\&\qquad=a*(a\circ c)=a. &&(\text{吸收律})\end{aligned}$$

因此有

$$a \circ ((a * b) * c) = a \circ (a * (b * c)).$$

再证式(6.3.2).

$$\begin{aligned} a' \circ (a * (b * c)) &= (a' \circ a) * (a' \circ (b * c)) && \text{(分配律)} \\ &= 1 * (a' \circ (b * c)) && \text{(交换律,补元律)} \\ &= a' \circ (b * c), && \text{(交换律,同一律)} \\ a' \circ ((a * b) * c) &= (a' \circ (a * b)) * (a' \circ c) && \text{(分配律)} \\ &= ((a' \circ a) * (a' \circ b)) * (a' \circ c) && \text{(分配律)} \\ &= (1 * (a' \circ b)) * (a' \circ c) && \text{(交换律,补元律)} \\ &= (a' \circ b) * (a' \circ c) && \text{(交换律,同一律)} \\ &= a' \circ (b * c), && \text{(分配律)} \end{aligned}$$

因此

$$a' \circ ((a * b) * c) = a' \circ (a * (b * c)).$$

同理可证关于$\circ$运算结合律成立.

定义 6.3.3 设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$是布尔代数,$S$ 是 B 的非空子集,若 $0,1 \in S$,且 S 对 $\wedge, \vee$ 和$'$运算都是封闭的,则 S 是 B 的**子布尔代数**.

例 6.3.2 考虑 110 的正因子集合 S_{110} 关于 gcd,lcm 运算构成的布尔代数,它有以下子布尔代数:

$$\{1,110\},$$
$$\{1,2,55,110\},$$
$$\{1,5,22,110\},$$
$$\{1,10,11,110\},$$
$$\{1,2,5,10,11,22,55,110\}.$$

定义 6.3.4 设$\langle B_1, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$和$\langle B_2, \cap, \cup, -, \theta, E\rangle$是两个布尔代数,这里 $\cap, \cup, -$ 泛指布尔代数 B_2 中的求最大下界、最小上界和补元运算,θ 和 E 分别是 B_2 的**全下界**和**全上界**,φ: $B_1 \to B_2$,如果 $\forall a, b \in B_1$,有

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b),$$
$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b),$$
$$\varphi(a') = -\varphi(a).$$

则称 φ 是布尔代数 B_1 到 B_2 的同态映射,简称**布尔代数同态**.

类似地,可以定义布尔代数的单同态、满同态和同构.

定义 6.3.5 设 L 是格. $0 \in L, a \in L$,若 $\forall b \in L$ 有

$$0 < b \leqslant a \Leftrightarrow b = a,$$

则称 a 是 L 中的**原子**.

考虑图 6.3.1 中的几个格,其中 L_1 的原子是 a,L_2的原子是 a,b,c,L_3的原子是 a 和 b. 若 L 是正整数 n 的全体正因子关于整除关系构成的格,则 L 的原子恰为 n 的全体素因子. 若 L 是集合 B 的幂集格,则 L 的原子就是由 B 中元素构成的单元集.

下面的定理说明有限布尔代数有着良好的结构. 限于篇幅,这里只给出相关的结果,不再加以证明.

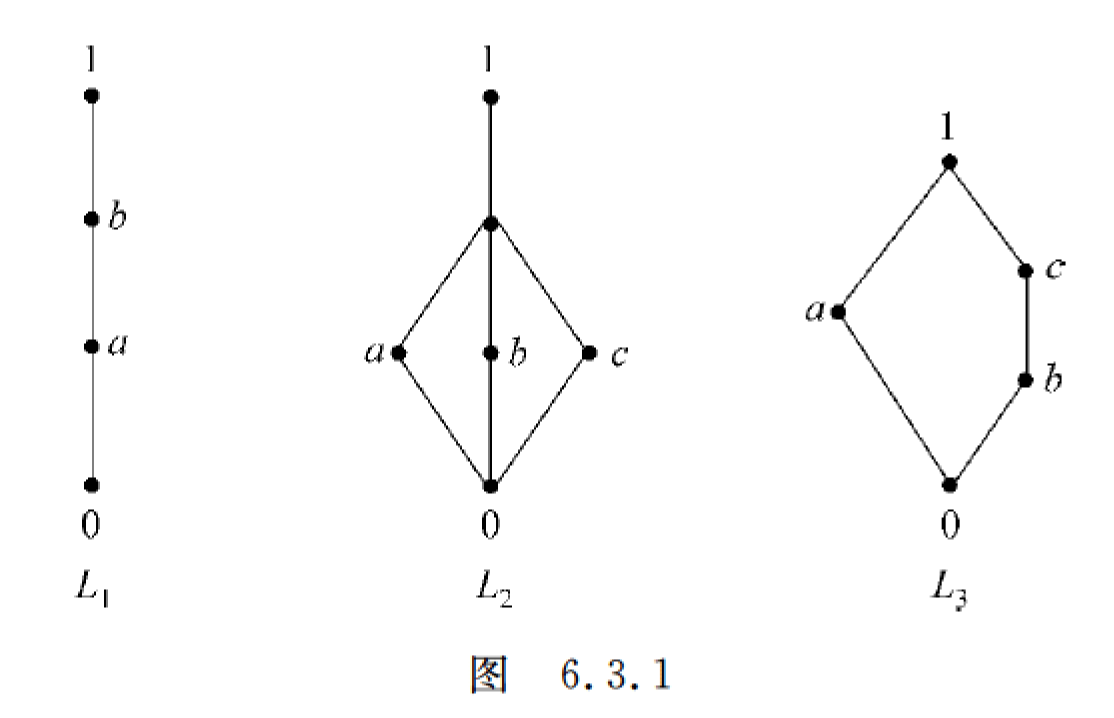


图 6.3.1

定理 6.3.2(有限布尔代数的表示定理) 设 B 是有限布尔代数,A 是 B 的全体原子构成的集合,则 B 同构于 A 的幂集代数 $P(A)$.

推论 1 任何有限布尔代数的基数为 2^n,$n\in\mathbb{N}$.

证明 设 B 是有限布尔代数,A 是 B 的所有原子构成的集合.且 $|A|=n$,$n\in\mathbb{N}$.由定理 6.3.2 得 $B\cong P(A)$,而 $|P(A)|=2^n$,故 $|B|=2^n$.

推论 2 任何等势的有限布尔代数都是同构的.

根据这个定理,有限布尔代数的基数都是 2 的幂,同时在同构的意义上对于任何 2^n(n 为自然数),仅存在一个 2^n 元的布尔代数.图 6.3.2 给出了 1 元、2 元、4 元和 8 元的布尔代数.

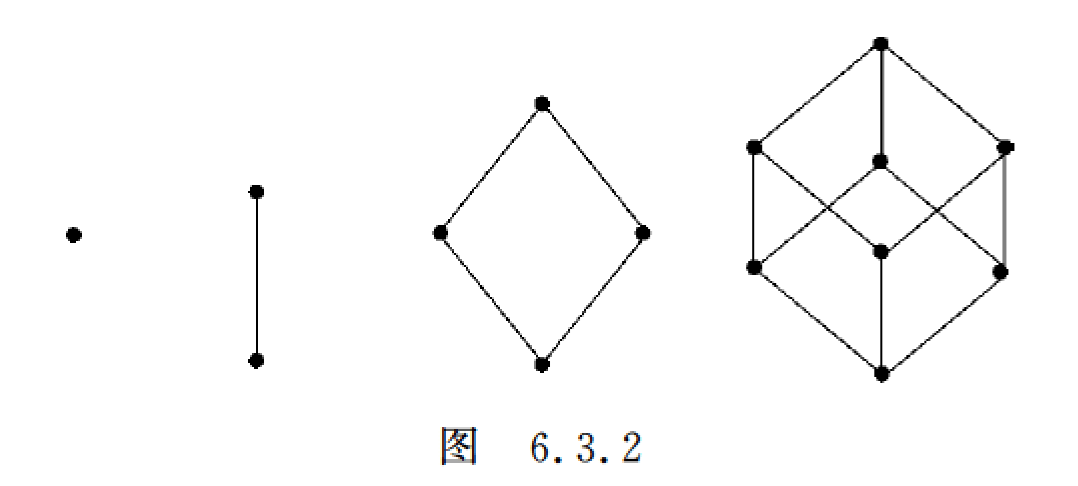


图 6.3.2

习 题 6

1. 图 6.1 给出了 6 个偏序集的哈斯图.判断其中哪些是格.如果不是格,说明理由.

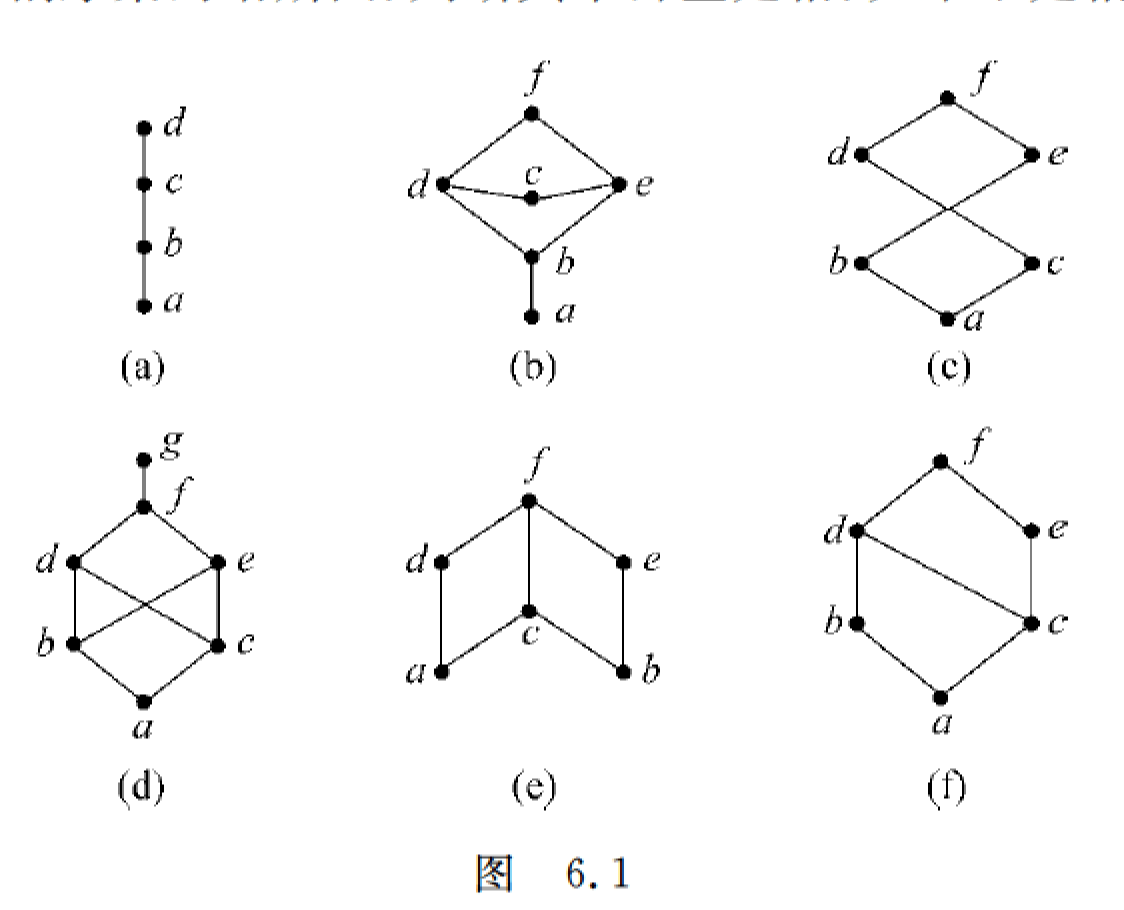


图 6.1

2. 下列各集合对于整除关系都构成偏序集,判断哪些偏序集是格.

(1) $L=\{1,2,3,4,5\}$;　　(2) $L=\{1,2,3,6,12\}$;

(3) $L=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$;　　(4) $L=\{1,2,2^2,\cdots,2^n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$.

3. 设 L 是格,求以下公式的对偶式:

(1) $a\wedge(a\vee b)\leqslant a$;

(2) $a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

(3) $b\vee(c\wedge a)\leqslant(b\vee c)\wedge a$.

4. 设 $*$ 为集合 S 上可交换、可结合的二元运算. 若 a 和 b 是 S 上关于 $*$ 运算的幂等元,证明 $a*b$ 也是关于 $*$ 运算的幂等元.

5. 设 L 是格, $a,b,c\in L$,且 $a\leqslant b\leqslant c$,证明: $a\vee b=b\vee c$.

6. 针对图 6.2.1 中的格 L_2,求出 L_2 的所有子格.

7. 由下列集合 L 构成的偏序集 $\langle L,\leqslant\rangle$,其中 $\leqslant$ 定义为:对于 $n_1,n_2\in L$, $n_1\leqslant n_2$,当且仅当 n_1 是 n_2 的因子,问其中哪几个偏序集是格?

(1) $L=\{1,2,3,4,6,12\}$;

(2) $L=\{1,2,3,4,6,8,12,14\}$;

(3) $L=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

8. 设 $\langle L,\leqslant\rangle$ 为一格,其哈斯图如图 6.2,取

$$S_1=\{a,b,c,d\},S_2=\{a,b,d,f\},S_3=\{b,c,d,f\},$$

问 $\langle S_1,\leqslant\rangle$, $\langle S_2,\leqslant\rangle$, $\langle S_3,\leqslant\rangle$ 中哪些是格? 哪些是 $\langle L,\leqslant\rangle$ 的子格?

9. 证明在任何格 $\langle L,\leqslant\rangle$ 中,对任意的 $a,b,c\in L$,有

$$[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)]=a\wedge b$$

成立.

10. 设 B 是布尔代数, B 中的表达式 f 是

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(b\wedge c).$$

(1) 化简 f ;

(2) 求 f 的对偶式 f^*.

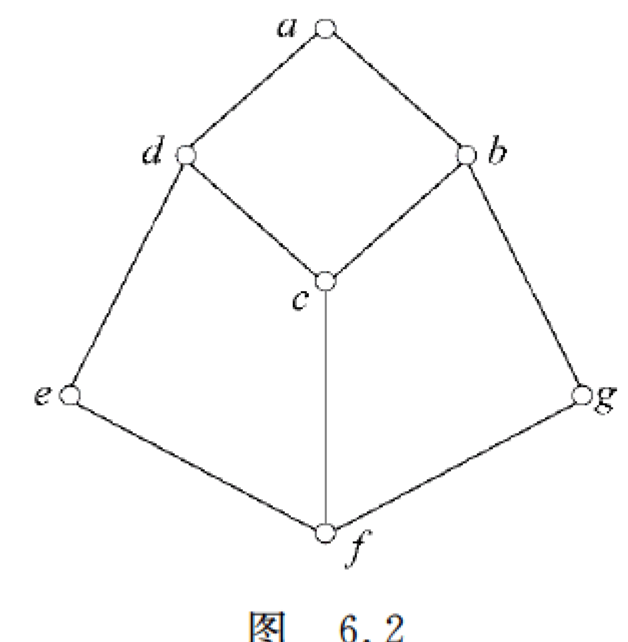


图 6.2

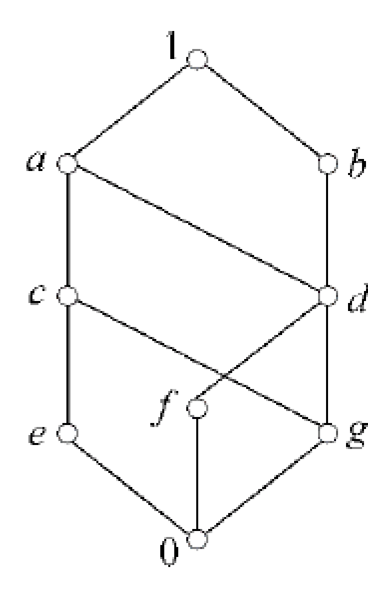


图 6.3

11. 根据图 6.3 所示的有界格,回答下列问题:

(1) a 和 f 的补元素分别是哪些元素?

(2) 该有界格是分配格吗?

(3) 该有界格是有补格吗?

第7章

图　论

图论最早起源于一些数学游戏的难题研究，如1736年欧拉(L. Euler)所解决的哥尼斯堡七桥问题，以及一些在民间广泛流传的一些游戏难题，如迷宫问题，棋盘上马的行走路线问题及匿门博弈问题等. 这些难题，当时吸引了很多学者的注意，在这些问题研究的基础上又提出了著名的哈密顿问题. 1847年，德国物理学家克希霍夫(Kirchhoff)用图论分析电路网络，这是最早应用图论解决工程科学，以后随着科学的发展，图论在运筹学、网络理论、信息论、控制论及计算机科学等各个领域的应用越来越广泛. 图论是一门应用非常广泛的学科，其包含的内容当然是浩瀚如海. 这里我们只介绍一些基本概念和定理.

7.1　图的基本概念

在生产、生活及科学研究中，人们常用点表示事物. 用点与点之间是否有连线表示事物之间是否具有某种关系，这样构成的图形就是图论中的图. 其实，集合论中二元关系的关系图也是图论中的图. 图论中的图与几何学中的图的本质区别在于，图论中的图，人们只关心点之间是否有连线，而不关心点的位置，以及连线的曲直，为了给出图论中图的抽象而严格的数学定义，先给出无序积的概念.

设 A,B 为任意的两个集合，称

$$\{\{a,b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

为 A 与 B 的无序积，记作 $A\&B$.

为方便起见，将无序积中的无序对 $\{a,b\}$，记为 (a,b)，并且允许 $a=b$. 需要指出的是，无论 a,b 是否相等，均有 $(a,b)=(b,a)$，因而 $A\&B=B\&A$.

定义 7.1.1　一个无向图 G 是一个有序的二元组 $G=\langle V,E\rangle$，其中 V 是非空有限集合，称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**结点**. E 为**边集**，即对任意 $e\in E$，都存在 $(u,v)\in V\&V$ 与之相对应，其元素称为**无向边**，简称为**边**.

定义 7.1.2　一个有向图 D 是一个有序二元组 $D=\langle V,E\rangle$，其中 V 是一个非空的有限集合，称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**结点**. E 为**边集**，即对任意 $e\in E$，都存在 $\langle u,v\rangle \in V\times V$ 与之相对应，其元素称为**有向边**，简称为**边**.

无向图和有向图统称为图，但有时也常把无向图简称为图. 通常用 G 表示无向图，D 表示有向图. 本书用符号 $|E(G)|$ 或 $|E(D)|$ 分别表示图 G 或 D 的边数，用 $|V(G)|$ 或 $|V(D)|$ 分别表示图 G 或 D 的顶点数，在不致发生混淆时，通常略去符号中的字母 G 或 D，记为 $|E|$，$|V|$.

通常用图形来表示无向图和有向图：用小圆圈(或实心点)表示顶点，用顶点之间的连线表示无向边，用带箭头的连线表示有向边.

例 7.1.1 (1) 给定无向图 $G=\langle V,E\rangle$，其中

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},\quad E=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_1,v_5),(v_4,v_5)\}.$$

(2) 给定有向图 $D=\langle V,E\rangle$，其中

$$V=\{a,b,c,d\},\quad E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle\}.$$

分别画出 G 与 D 的图形.

解 图 7.1.1 中(a)，(b)分别给出了无向图 G 和有向图 D 的图形.

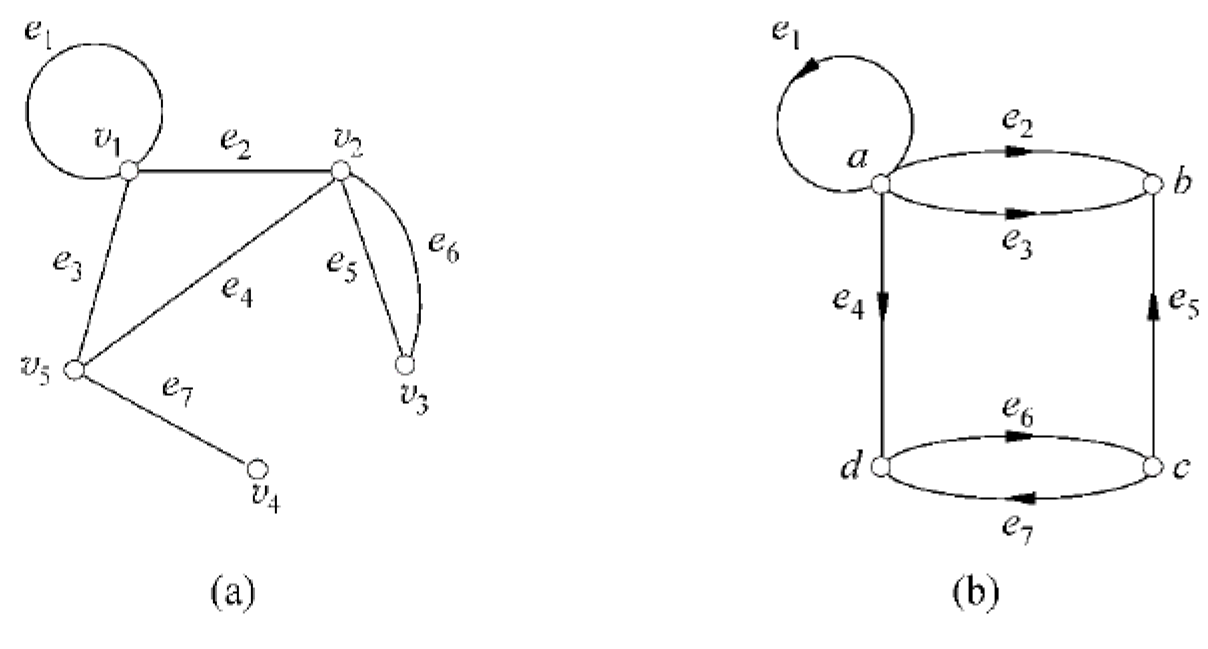


图 7.1.1

定义 7.1.3 对于每一个有向图 D，可以在相同顶点集上作一个图 H，使得对于 D 的每条弧，H 有一条有相同端点的无向边与之对应. 这个图称为 D 的**基础图**.

例 7.1.2 图 7.1.2(a)中的基础图如图 7.1.2(b)所示.

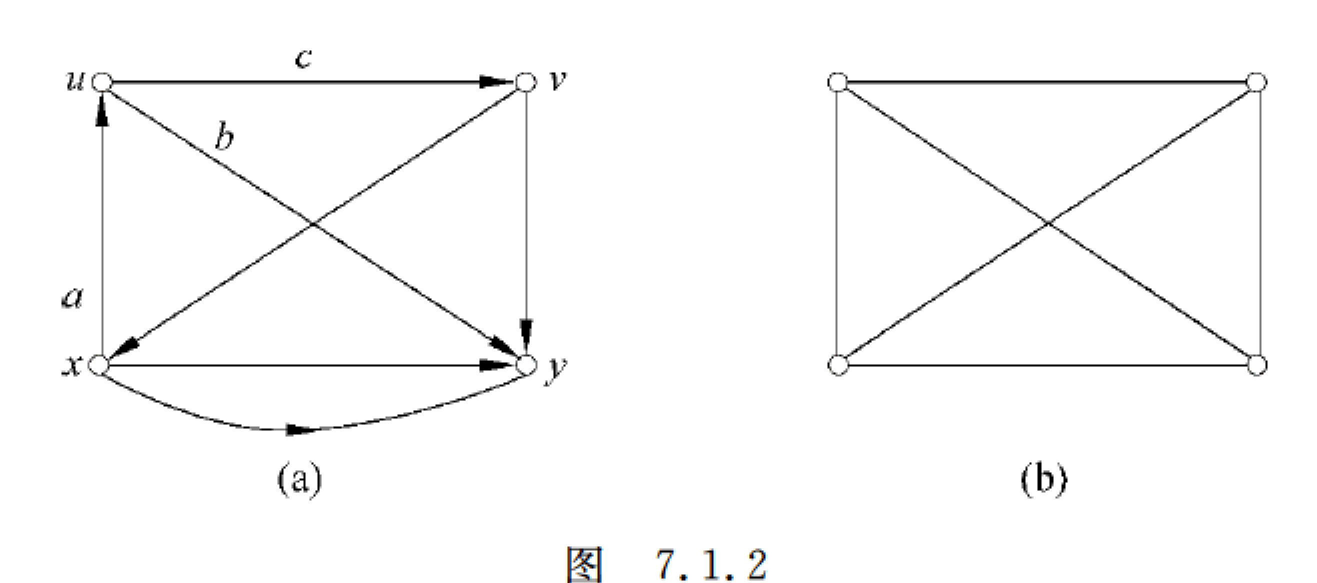


图 7.1.2

与定义 7.1.1 和定义 7.1.2 有关的还有下面一些概念和规定.

(1) 将有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称为这个有向图的基图.

(2) 顶点数称作图的阶，n 个顶点的图称为 n 阶图.

(3) 在图的定义中规定顶点集 V 为非空集，但在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果，为此规定顶点集为空集的图为空图，并将空图记为$\varnothing$.

(4) 设 $G=\langle V,E\rangle$为无向图，$e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E$，称 v_i,v_j 为 e_k 的端点，e_k 与 $v_i(v_j)$关联. 若 $v_i\neq v_j$，则称 e_k 与 $v_i(v_j)$的关联次数为 1；若 $v_i=v_j$，则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 2，并称 e_k 为环. 如果顶点 v_l 不与边 e_k 关联，则称 e_k 与 v_l 的关联次数为 0. 与任何边均不相关联的顶点称为孤立点.

若两个顶点 v_i 与 v_l 之间有一条边连接，则称这两个顶点相邻. 若两条边至少有一个公

共端点,则称这两条边相邻.

定义 7.1.4 在无向图中,如果关联一对顶点的无向边多于 1 条,则称这些边为平行边,平行边的条数称为**重数**. 在有向图中,如果关联一对顶点的有向边多于 1 条,并且这些边的始点与终点相同(也就是它们的方向相同),则称这些边为平行边. 含平行边的图称为**多重图**,既不含平行边也不含环的图称为**简单图**.

定义 7.1.5 仅由孤立点组成的图称为**零图**,仅由一个孤立点构成的图称为**平凡图**.

例 7.1.3 在图 7.1.1(a)中 e_5 与 e_6 是平行边,在(b)中 e_2 与 e_3 是平行边,而 e_6 与 e_7 不是平行边. (a),(b)两个图都不是简单图.

定义 7.1.6 设 $G=\langle V,E\rangle$为无向图, $\forall v\in V$,称 v 作为边的端点的次数之和为 v 的度数,简称为**度**,记作 $d_G(v)$或 $\deg(v)$,简记为 $d(v)$. 设 $D=\langle V,E\rangle$为有向图, $\forall v\in V$,称 v 作为边的始点的次数之和为 v 的**出度**,记作 $d_D^-(v)$,简记作 $d^-(v)$. 称 v 作为边的终点的次数之和为 v 的**入度**,记作 $d_D^+(v)$,简记作 $d^+(v)$. 称 $d^-(v)+d^+(v)$为 v 的**度数**,记作 $d_D(v)$,简记作 $d(v)$.

注 在无向图中,顶点 v 上的环以 v 作 2 次端点. 在有向图中,顶点 v 上的环以 v 作一次始点和一次终点,共作 2 次端点.

在无向图 G 中,令

$$\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\},\quad \delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V(G)\},$$

分别称为 G 的最大度和最小度. 可类似地定义有向图 D 的最大度 $\Delta(D)$、最小度 $\delta(D)$和最大入度 $\Delta^+(D)$ 、最小入度 $\delta^+(D)$、最大出度 $\Delta^-(D)$、最小出度 $\Delta^-(D)$:

$$\Delta(D)=\max\{d(v)\mid v\in V(D)\},\quad \delta(D)=\min\{d(v)\mid v\in V(D)\};$$

$$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\mid v\in V(D)\},\quad \delta^+(D)=\min\{d^+(v)\mid v\in V(D)\};$$

$$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\mid v\in V(D)\},\quad \delta^-(D)=\min\{d^-(v)\mid v\in V(D)\}.$$

并把它们分别简记为 $\Delta,\delta,\Delta^+,\delta^+,\Delta^-,\delta^-$.

另外,称度数为 1 的顶点为悬挂顶点,与它关联的边称为悬挂边. 度为偶数(奇数)的顶点称为偶度(奇度)顶点.

例 7.1.4 在图 7.1.1(a)中, $d(v_1)=4$(注意,环提供 2 度), $\Delta=4,\delta=1$, v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边. 在(b)中, $d^+(a)=1$, $d^-(a)=4$(环 e_1 提供 1 个出度和 1 个入度), $d(a)=4+1=5$. $\Delta=5,\delta=3,\Delta^-=4$(在 a 点达到), $\delta^-=0$(在 b 点达到), $\Delta^+=3$(在 b 点达到), $\delta^+=1$(在 a 和 c 点达到).

定理 7.1.1 在任何无向图中,所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

证明 图中每条边(包括环)均有两个端点,所以在计算各顶点度数之和时,每条边均提供 2 度. m 条边,共提供 $2m$ 度.

欧拉曾对此定理给出了这样一个形象解释:许多人在见面时握了手,两只手握在一起,被握过手的总次数为偶数,故此定理也称为握手定理.

定理 7.1.2 在任何有向图 D 中,下述结论成立:

(1) 顶点的度的总和等于边数和的两倍,即

$$\sum_{v\in V}d(v)=2\mid E\mid;$$

(2) 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和,即

$$\sum_{v\in V} d^-(v) = \sum_{v\in V} d^+(v).$$

证明 (1) 的证明如定理 7.1.1 的证明.

(2) 因为每条弧必对应于一个入度和一个出度,若一顶点具有一个入度或出度,则必关联一条弧,所以有向图中各顶点入度之和等于其弧的数目,同时各顶点出度之和也等于其弧的数目,因此所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和.

推论 1 在任何图中,奇度顶点的个数必为偶数.

证明 设 V_1 和 V_2 分别是图中奇度顶点集和偶度顶点集,则由定理 7.1.1 有

$$\sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) = \sum_{v\in V} d(v) = 2\,|\,E\,|.$$

由于 $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 是偶数之和,必为偶数,而 $2\,|\,E\,|$ 是偶数,故得 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 是偶数,即 $|V_1|$ 是偶数.

推论 2 任何图(无向的或有向的)中,奇度顶点的个数是偶数.

证明 设图 $G=\langle V,E\rangle$,令

$$V_1 = \{v \mid v \in V \wedge d(v)\ \text{为奇数}\},\quad V_2 = \{v \mid v \in V \wedge d(v)\ \text{为偶数}\},$$

则 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \varnothing$,由握手定理可知

$$2m = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v).$$

由于 $2m, \sum_{v\in V_2} d(v)$ 均为偶数,所以 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 为偶数,但因 V_1 中顶点度数为奇数,所以 $|V_1|$ 必为偶数.

定理 7.1.3 非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 能成为图的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.

证明 由定理 7.1.1,必要性显然. 下面证明充分性,由已知条件可知,d 中有 $2k$ $\left(0\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 个奇数,不妨设它们为 $d_1,d_2,\cdots,d_k,d_{k+1},d_{k+2},\cdots,d_{2k}$. 如下构造以 d 为度数序列的 n 阶无向图 $G=\langle V,N\rangle$:$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,在顶点 v_r 与 v_{r+k} 之间连边,$r=1,2,\cdots,k$. 若 d_i 为偶数,令 $d'_i=d_i$,若 d_i 为奇数,令 $d'_i=d_i-1$,得 $d'=(d'_1,d'_2,\cdots,d'_n)$,则 d'_i 均为偶数. 再在 v_i 处画 $d'_i/2$ 条环($i=1,2,\cdots,n$). 这就证明了存在以 d 为顶点度数的图.

下述定理是显然的.

定理 7.1.4 设 G 为任意 n 阶无向简单图,则 $\Delta(G)\leqslant n-1$.

例 7.1.5 下列各序列能成为图的度数序列吗?能成为简单图的度数序列吗?为什么?

(1) (5,5,4,4,2,1);

(2) (5,4,3,2,2);

(3) (3,3,3,1);

(4) $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,$d_1>d_2>\cdots>d_n\geqslant 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数;

(5) (4,4,3,3,2,2).

解 由定理 7.1.3,除(1)不可作为图的度数序列外,其余各序列都可作为图的度数序列.但除了(5)中序列外,其余的都是不可作为简单图的度数序列.(2)中序列有 5 个数,最大的数是 5.根据定理 7.1.4,它不可作为简单图的度数序列.类似可证(4)不可作为简单图的度数序列.假设(3)可以作为简单图的度数序列,设 $G=\langle V,E\rangle$ 以 (3,3,3,1) 为度数序列.不妨设 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,且 $d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=3$,$d(v_4)=1$.由于 $d(v_4)=1$,因而 v_4 只能与 v_1,v_2,v_3 之一相邻,不妨设与 v_1 相邻.于是 v_2 只能与 v_1 和 v_3 相邻,v_3 只能与 v_1 和 v_2 相邻,不可能有 3 度.因而,(3)不可作为简单图的度数序列.(5)是可作为简单图的度数序列,图 7.1.3 中两个 6 阶无向简单图都以(4,4,3,3,2,2)为度数序列.

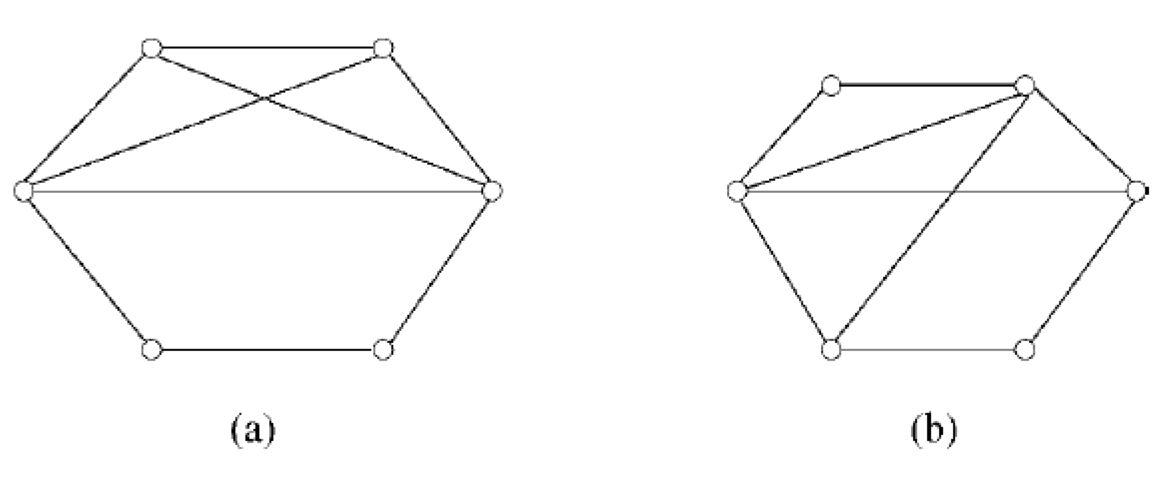


图 7.1.3

定义 7.1.7 设 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$,$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$ 为两个无向图(或两个有向图).若存在双射函数 $f: V_1\to V_2$,对于 $\forall v_i,v_j\in V_1$,$(v_i,v_j)\in E_1$($\langle v_i,v_j\rangle\in E_1$)当且仅当

$$(f(v_i),f(v_j))\in E_2(\langle f(v_i),f(v_j)\rangle\in E_2),$$

并且 (v_i,v_j) 与 $(f(v_i),f(v_j))$($\langle v_i,v_j\rangle$ 与 $\langle f(v_i),f(v_j)\rangle$)的重数相同,则称 G_1 与 G_2 是**同构的**,记作 $G_1\cong G_2$.

注 从图形上看,两个图 G_1 与 G_2 同构,就是要求 $V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 之间能建立一一对应关系,并且 G_1 中的两顶点之间有边的充要条件是 G_2 的对应的两点之间也有边且边重数也相同.

例 7.1.6 在图 7.1.4 中,(a)称作彼得松(Peterson)图,(b),(c)均与(a)同构.(d),(e),(f)各图彼此间都不同构.

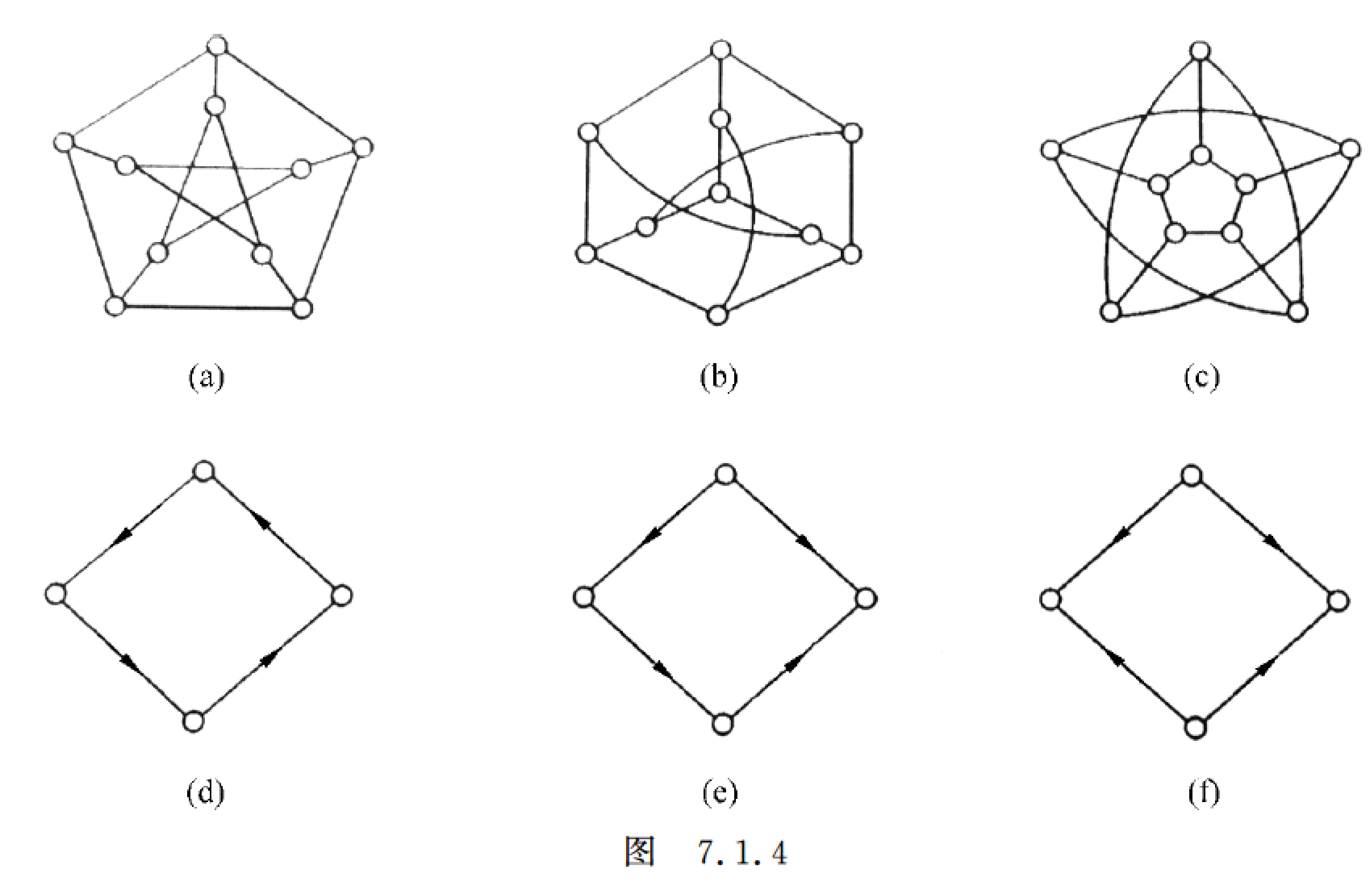


图 7.1.4

图之间的同构关系“≌”构成全体图集合上的二元关系. 它具有自反性、对称性和传递性,故是等价关系. 在这个等价关系的每个等价类中的图,在同构意义下都可以看成一个图. 在图 7.1.4 中,(a),(b),(c)可以看成一个图,它们都是彼得松图. 至今还没有找到判断两个图是否同构的便于验证的充分必要条件.

综上所述,可以得到两图同构的一些必要条件:

(1) 顶点数目相同;

(2) 边数相等;

(3) 度数相同的顶点数目相等.

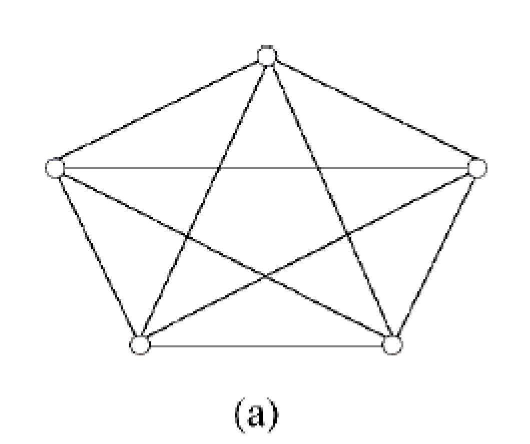
以上条件都不是充分条件. 如图 7.1.3 中的两个图有相同的度数序列,但它们不同构.

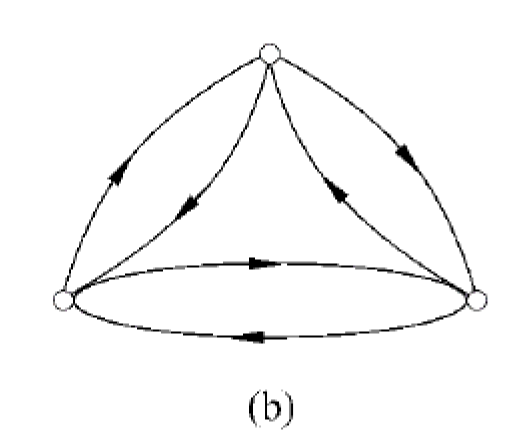
定义 7.1.8 设 G 为 n 阶无向简单图,若 G 中每个顶点均与其余的 $n-1$ 个顶点相邻,则称 G 为 n 阶无向完全图,简称 n 阶完全图,记作 $K_n(n\geqslant 1)$. K_n 含有 C_n^2 条边.

设 D 为 n 阶有向简单图,若 D 中每个顶点都邻接到其余的 $n-1$ 个顶点,则称 D 是 n 阶有向完全图. n 阶有向简单图含有 $2C_n^2$ 条边.

设 D 为 n 阶有向简单图,若 D 的基图为 n 阶无向完全图 K_n,则称 D 是 n 阶竞赛图.

在图 7.1.5 中,(a)为 K_5,(b)为 3 阶有向完全图,(c)为 4 阶竞赛图.


(a)


(b)

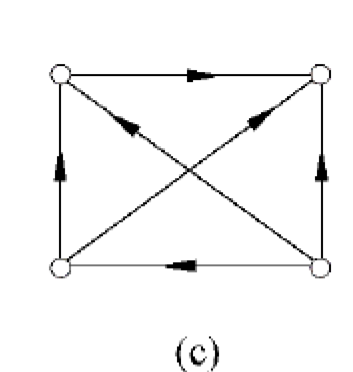

(c)

图 7.1.5

易知,n 阶无向完全图,n 阶有向简单图,n 阶竞赛图的边数分别为 $\frac{n(n-1)}{2}$,$n(n-1)$,$\frac{n(n-1)}{2}$.

定义 7.1.9 设 G 为 n 阶无向简单图,若 $\forall v\in V(G)$,均有 $d(v)=k$,则称 G 为 k-正则图.

由定义可知,n 阶零图是 0-正则图,n 阶无向完全图是 $(n-1)$-正则图,彼得松图是 3-正则图. 由握手定理可知,n 阶 k-正则图中,边数 $m=\frac{kn}{2}$,因而当 k 为奇数时,n 必为偶数.

定义 7.1.10 设 $G=\langle V,E\rangle$,$G'=\langle V',E'\rangle$为两个图(同为无向图或同为有向图),若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$,则称 G'是 G 的**子图**,G 为 G'的**母图**,记作 $G'\subseteq G$. 又若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$,则称 G' 为 G 的**真子图**. 若 $V'=V$,则称 G'为 G 的**生成子图**.

设 $G=\langle V,E\rangle$,$V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$,称以 V_1 为顶点集,以 G 中两个端点都在 V_1中的边组成边集 E_1的图为 G 的 V_1导出的子图,记作 $G[V_1]$. 又设 $E_1\subset E$ 且 $E_1\neq\varnothing$,称以 E_1 为边集,以 E_1中边关联的顶点为顶点集 V_1的图为 G 的 E_1导出的子图,记作 $G[E_1]$.

例 7.1.7 在图 7.1.6 中,取 $V_1=\{a,b,c\}$,(b)是(a)的 V_1 导出的子图. 取 $E_1=\{e_1,e_3\}$,(c)是(a)的 E_1 导出的子图.

例 7.1.8 (1) 画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图.

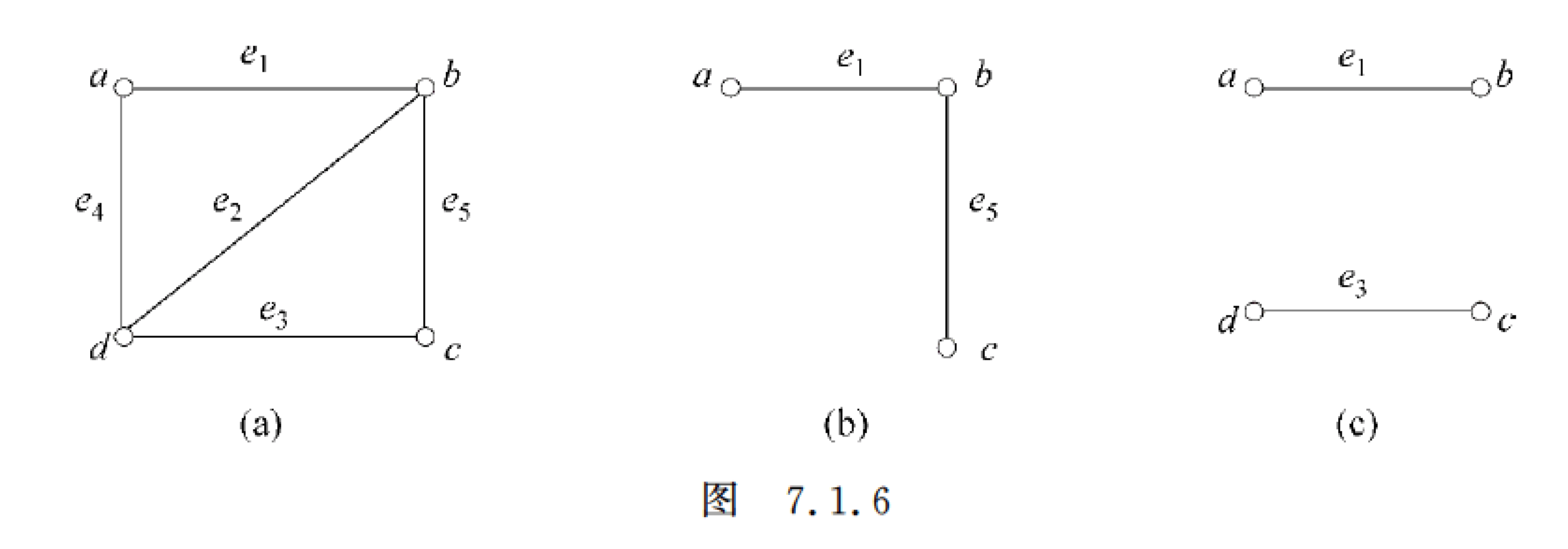


图 7.1.6

(2) 画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图.

解 (1) 由握手定理,所画的无向简单图各顶点度数之和为 $2\times3=6$,最大度小于或等于 3. 于是所求无向简单图的度数序列应满足的条件是,将 6 分成 4 个非负整数,每个整数均大于或等于 0 且小于或等于 3,并且奇数的个数为偶数. 将这样的整数列排出来只有下面三种情况:

(a) 3,1,1,1;

(b) 2,2,1,1;

(c) 2,2,2,0.

将每个度数序列所有非同构的图都画出来即得所求的全部非同构的图,见图 7.1.7 中(a),(b),(c).

(2) 由握手定理,所画的有向简单图各顶点度数之和为 4,最大出度和最大入度均小于或等于 2. 度数序列及入度、出度列为

(a) 度数序列 1,2,1;

(a.1) 入度列 0,1,1,出度列 1,1,0;

(a.2) 入度列 0,2,0,出度列 1,0,1;

(a.3) 入度列 1,0,1,出度列 0,2,0;

(b) 度数序列 2,2,0,入度列 1,1,0,出度列 1,1,0.

4 个所要求的有向简单图见图 7.1.7 中(d),(e),(f),(g).

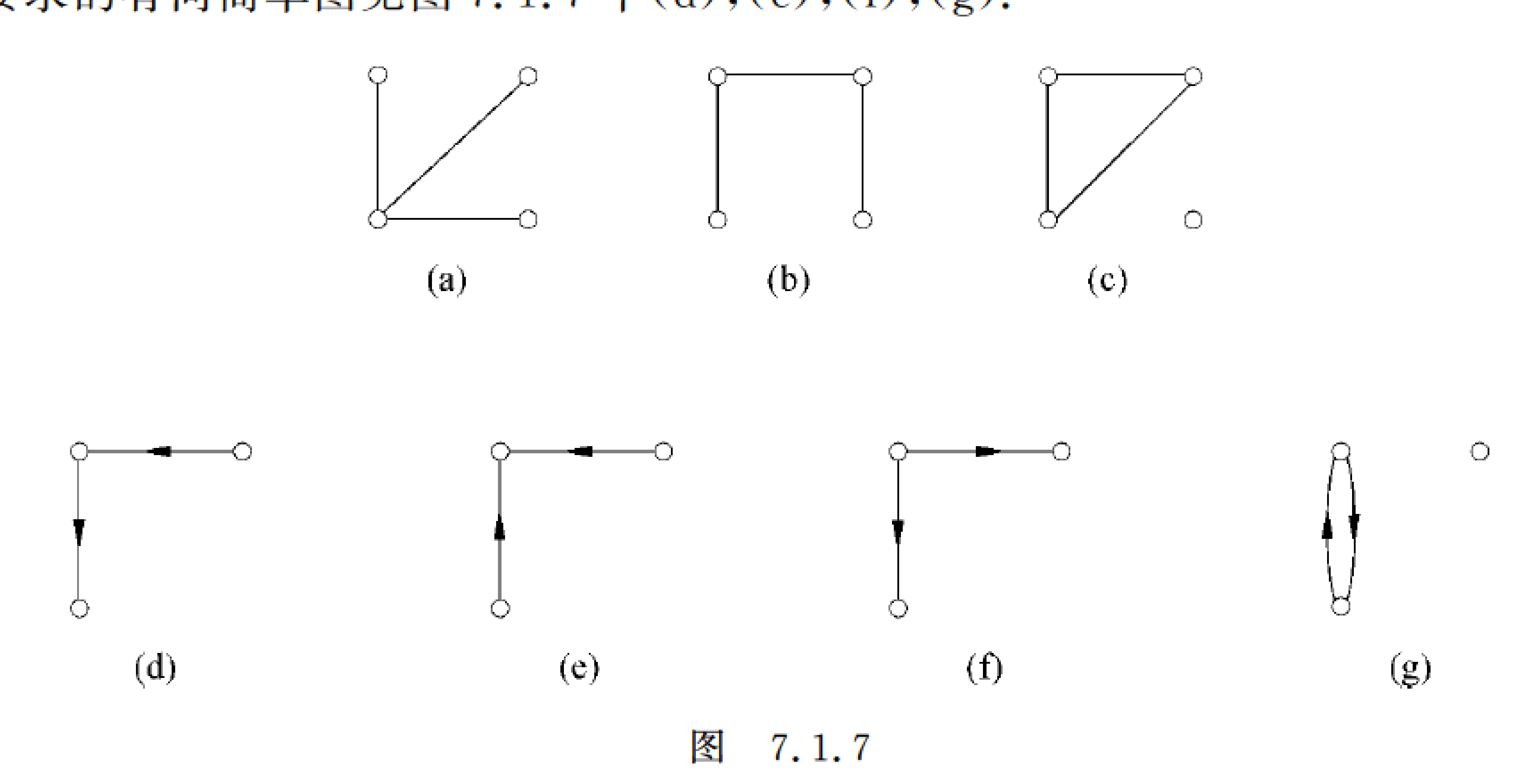


图 7.1.7

对于一般情况,给定正整数 n 和 $m\left(m\leqslant\frac{n(n-1)}{2}\right)$,构造所有非同构的 n 阶 m 条边的无

向(有向)简单图仍是目前还没有解决的难题.

定义 7.1.11 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶无向简单图,令

$$\bar{E}=\{(u,v)\mid u\in V\wedge v\in V\wedge u\neq v\wedge (u,v)\notin E\},$$

称 $\bar{G}=\langle V,\bar{E}\rangle$ 为 G 的补图.

若图 $G\cong\bar{G}$,则称 G 是自补图.

在图 7.1.7 中,(a)与(c)互为补图,(b)是自补图.

定义 7.1.12 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图.

(1) 设 $e\in E$,用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e,称为删除边 e. 又设 $E'\subset E$,用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边,称为**删除 E'**.

(2) 设 $v\in V$,用 $G-v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的一切边,称为**删除顶点 v**. 又设 $V_1\subset V$,用 $G-V'$表示从 G 中删除 V'中所有的顶点,称为**删除 V'**.

(3) 设 $e=(u,v)\in E$,用 $G\backslash e$ 表示从 G 中删除 e 后,将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w(可以用 u 或 v 充当 w)代替,并使 w 关联除 e 以外 u,v 关联的所有边,称为**边 e 的收缩**.

(4) 设 $u,v\in V$(u,v 可能相邻,也可能不相邻),用 $G\cup(u,v)$(或 $G+(u,v)$)表示在 u,v 之间加一条边(u,v),称为**加新边**.

在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边.

例 7.1.9 在图 7.1.8 中,设(a)中图为 G,则(b)为 $G-e_5$,(c)为 $G-\{e_1,e_4\}$,(d)为 $G-v_5$,(e)为 $G-\{v_4,v_5\}$,而(f)为 $G\backslash e_5$.

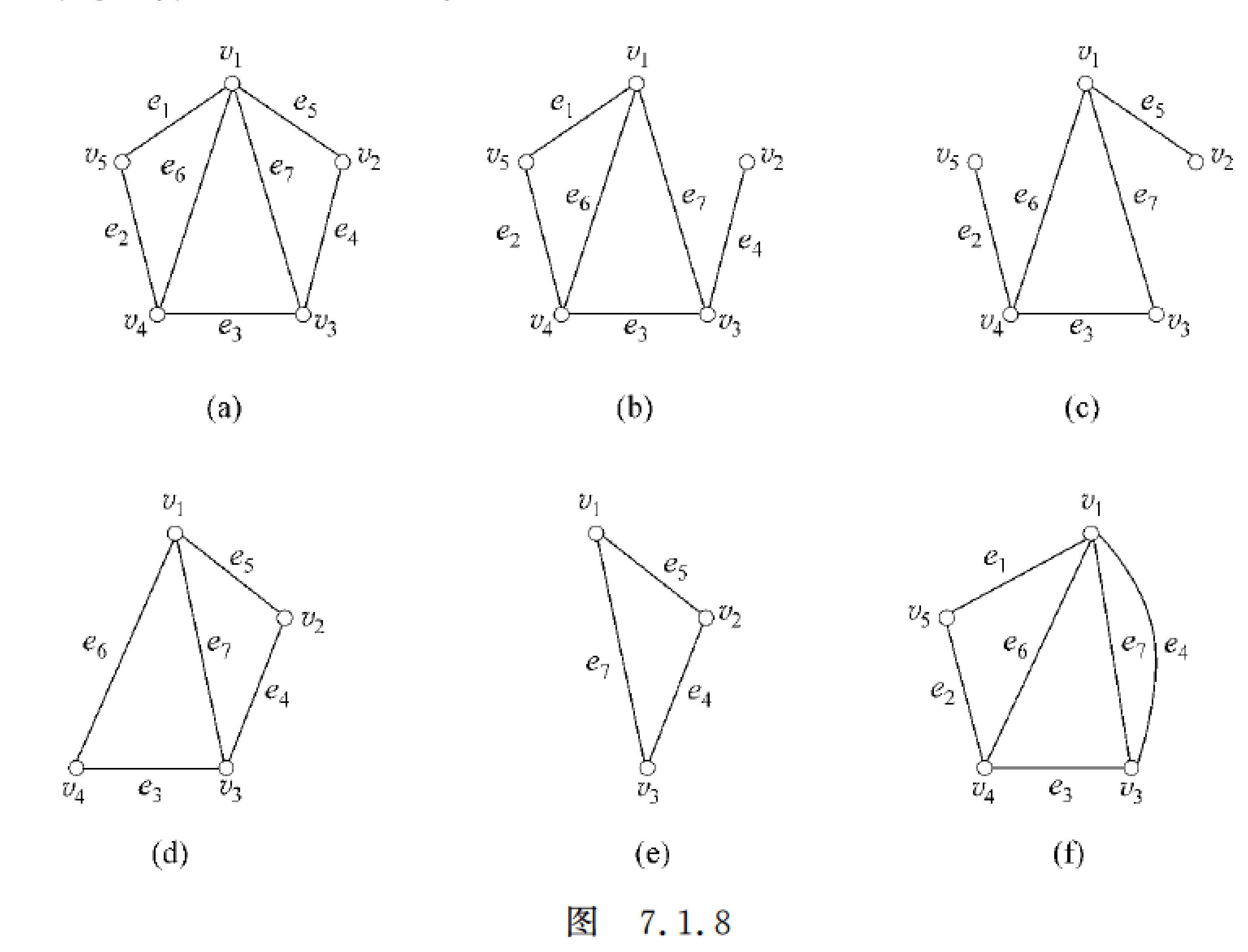


图 7.1.8

7.2 通路、回路和图的连通性

定义 7.2.1 (1) 设 G 为无向图,G 中顶点与边交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ 称为图 G 的一条从顶点 v_0 到 v_k 的**通路**(或**路径**). 如果它的项交替地为 G 的顶点和边,并且 e_i(1≤

$i \leqslant k$)的端点是 v_{i-1} 和 v_i，则称 v_0 和 v_k 分别为通路 Γ 的**起点**和**终点**，而 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 称为它的内部顶点，整数 k 称为 Γ 的长度. 特别当 $v_0 = v_k$ 时，称 Γ 为**回路**.

(2) 若通路 Γ 的边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 互不相同，则 Γ 称为**简单通路**(或**迹**). 同样对于回路 Γ 而言，若其边互不相同，则称 Γ 为**简单回路**(或**闭迹**).

(3) 若通路 Γ 的顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 互不相同(从而所有边互不相同)，则此通路 Γ 称为**初级通路**(或**路径**). 又若回路 Γ 除起点和终点外，其余顶点互不相同(从而所有边也互不相同)，则称回路 Γ 为**初级回路**(或**圈**). 将长度为奇数的圈称为**奇圈**，长度为偶数的圈称为**偶圈**.

注意，在初级通路与初级回路的定义中，仍将初级回路看成初级通路的特殊情况，只是在应用中初级通路都是始点与终点不相同，长为 1 的圈只能由环生成，长度为 2 的圈只能由平行边生成，因而在简单无向图中，圈的长度至少为 3.

另外，若 Γ 中有边重复出现，则称 Γ 为复杂通路. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$，则称 Γ 为复杂回路.

在有向图中，通路、回路及分类的定义与无向图中非常类似，只是要注意有向边方向的一致性.

根据定义，回路是通路的特殊情况；初级通路(回路)必是简单通路(回路)，但反之不真.

在简单图中可以只用顶点序列表示通路(回路)，写成 $\Gamma = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_l}$.

定理 7.2.1 在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 $v(u \neq v)$ 存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于或等于 $n-1$ 的通路.

证明 设 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_l v_l (v_0 = u, v_l = v)$ 为 G 中从 u 到 v 的通路. 若 $l \leqslant n-1$，则定理成立. 假设 $l > n-1$，此时 Γ 上的顶点数大于 G 中的顶点数，于是必存在 $k, s (0 \leqslant k < s \leqslant l)$，使得 $v_s = v_k$，即在 Γ 上存在 v_k 到自身的回路 C，在 Γ 上删除 C，得到

$$\Gamma' = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_k e_{s+1} \cdots e_l v_l,$$

Γ' 仍为从 u 到 v 的通路，且长度至少比 Γ 减少 1. 若 Γ' 还不满足要求，重复上述过程. 由于 G 是有限图，经过有限步后，必得到 u 到 v 长度小于或等于 $n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 $v(u \neq v)$ 存在通路，则 u 到 v 一定存在长度小于或等于 $n-1$ 的初级通路(路径).

类似可证明下面的定理和推论.

定理 7.2.2 在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路，则一定存在 v 到自身长度小于或等于 n 的回路.

推论 在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的简单回路，则一定存在 v 到自身长度小于或等于 n 的初级回路.

例 7.2.1 无向完全图 $K_n (n \geqslant 3)$ 中有几种非同构的圈？

解 长度相同的圈都是同构的，因而只有长度不同的圈才是非同构的. 易知 $K_n (n \geqslant 3)$ 中含长度为 $3, 4, \cdots, n$ 的圈，所以 $K_n (n \geqslant 3)$ 中有 $n-2$ 种非同构圈.

长度相同的圈都是同构的，因此在同构意义下给定长度的圈只有一个. 在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列. 如果只要两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈在定义意义下不同.

例 7.2.2 无向完全图 K_3 的顶点依次标定为 a, b, c. 在定义意义下 K_3 中有多少个不同的圈？

解 在同构意义下，K_3 中只有一个长为 3 的圈. 但在定义意义下，不同起点(终点)的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也看成是不同的，因而 K_3 中有 6 个不同的长为 3 的圈：$abca$，$acba$，$bacb$，$bcab$，$cabc$，$cbac$. 如果只考虑起点(终点)的差异，而不考虑顺时针、逆时针的差异，应该有 3 种不同的圈，当然它们的长度都是 3.

首先讨论无向图的连通性.

定义 7.2.2 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，若 $u,v\in V$ 之间存在通路，则称 u,v 是**连通的**，记作 $u\sim v$. 规定：$\forall v\in V, v\sim v$.

定理 7.2.3 无向图中顶点之间的连通关系是等价关系.

证明 (1) 由于规定任何顶点和自身总是连通的，因此顶点之间的连通关系具有自反性.

(2) 若两个顶点 u 和 v 之间存在通路，则 v 和 u 之间也存在通路，因而顶点之间的连通关系具有对称性.

(3) 若顶点 u 和顶点 v 是连通的，顶点 v 和顶点 w 是连通的，则从 u 到 v 存在通路，从 v 到 w 存在通路，于是从 u 经过 v 到 w 存在通路，即 u 和 w 是连通的，所以顶点之间的连通关系具有传递性.

由(1)、(2)、(3)知，顶点之间的连通关系是等价关系.

定义 7.2.3 如果对 G 的任意两个顶点 u 和 v，都有 $u\sim v$，则称 G 是**连通图**，否则称 G 是**非连通图**(**或分离图**).

显然，无向完全图 $K_n(n\geqslant 1)$ 都是连通图，而多于一个顶点的零图都是非连通图.

定义 7.2.4 设 u,v 为无向图 G 中任意两个顶点，若 $u\sim v$，称 u,v 之间长度最短的通路为 u,v 之间的短程线，短程线的长度称为 u,v 之间的**距离**，记作 $d(u,v)$. 当 u,v 之间不连通时，规定 $d(u,v)=\infty$.

距离有以下性质：

1. $d(u,v)\geqslant 0$，当 $u=v$ 时，等号成立；
2. 具有对称性：$d(u,v)=d(v,u)$；
3. 满足三角不等式：$\forall u,v,w\in V(G)$，则

$$d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w).$$

在完全图 $K_n(n\geqslant 2)$ 中，任何两个顶点之间的距离都是 1，而在 n 阶零图 $N_n(n\geqslant 2)$ 中，任何两个顶点之间的距离都为 ∞.

下面讨论无向图的连通程度.

由于无向图中顶点之间的连通关系是等价关系，而等价关系可以对集合进行划分，因此对于任何无向图中顶点集都存在一种划分，使得每个划分块中的顶点都彼此连通，而两个不同划分块中的顶点都不连通.

定义 7.2.5 在一个无向图 G 中，存在 V 的一个分类，把 V 分成非空子集 $V_1,V_2,\cdots,V_\omega$，使得两个顶点 u 和 v 是连通的当且仅当它们属于同一子集 V_i. 子图 $G[V_1],G[V_2],\cdots,G[V_\omega]$，称为 G 的**连通分支**. 用 $\omega(G)$ 表示 G 中的连通分支个数.

图 G 是连通的当且仅当 $\omega(G)=1$.

很容易看出，图 7.2.1(a)是连通图，$\omega(G)=1$，图 7.2.1(b)是非连通图，$\omega(G)=3$.

为了刻画连通图的"连通程度"，下面给出点割集和边割集的概念.

定义 7.2.6 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$.

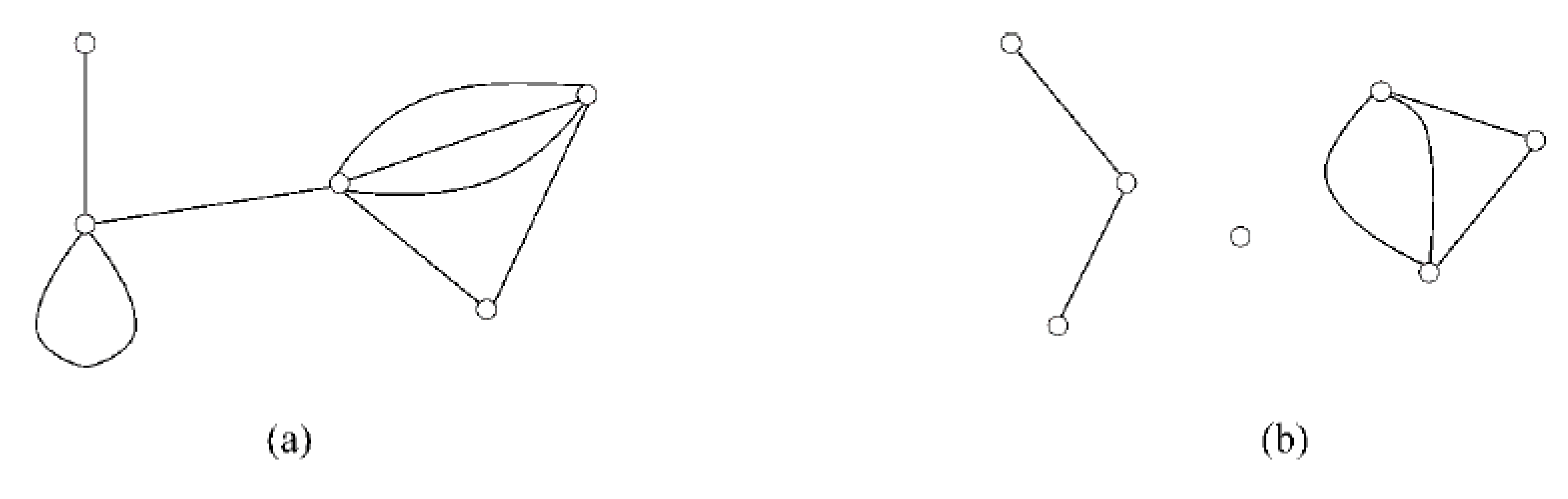


图 7.2.1

(1) 若存在顶点子集 $V'\subset V$,使得删除 V'(将 V' 中的顶点及其关联的边都删除)后,所得子图 $G-V'$ 的连通分支数与 G 的连通分支数满足 $\omega(G-V')>\omega(G)$,而删除 V' 的任何真子集 V'' 后,$\omega(G-V'')=\omega(G)$,则称 V' 为 G 的一个**点割集**.特别地,只有一个顶点的点割集,称该点割集的顶点为**割点**.

(2) 若存在边集 $E'\subset E$,使得删除 E'(将 E' 中的边都删除)后,所得子图 $G-E'$ 的连通分支数与 G 的连通分支数满足 $\omega(G-E')>\omega(G)$,而删除 E' 的任何真子集 E'' 后,都有 $\omega(G-E'')=\omega(G)$,则称 E' 为 G 的一个**边割集**,如边割集中只有一条边,则称该边为**割边或桥**.

例 7.2.3 如在图 7.2.2 中,$\{v_3,v_5\}$,$\{v_2\}$,$\{v_6\}$为点割集,v_2,v_6 为割点.$\{v_2,v_4\}$不是点割集,因为它的真子集$\{v_2\}$已经是点割集了.类似地,$\{v_1,v_6\}$也不是点割集.$\{e_3,e_4\}$,$\{e_4,e_5\}$,$\{e_1,e_2,e_3\}$,$\{e_1,e_2,e_4\}$,$\{e_9\}$等都是边割集,其中 e_9 是桥.$\{e_6,e_7,e_9\}$不是边割集,因为它的真子集$\{e_9\}$已经是边割集了.

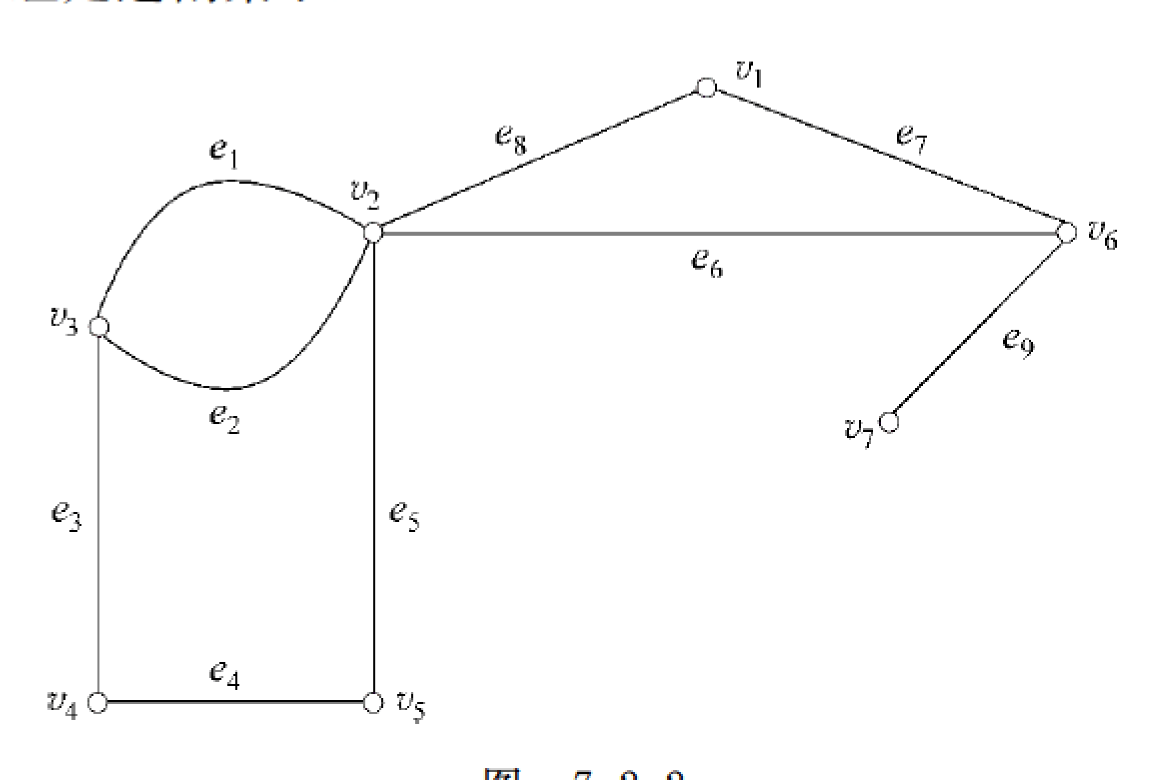


图 7.2.2

定理 7.2.4 无向图 G 的一条边 e 是割边当且仅当 e 不包含在 G 的任意圈中.

证明 设 e 是 G 的割边,由于 $\omega(G-e)>\omega(G)$,所以存在 G 的顶点 u 和 v,它们在 G 中连通但在 $G-e$ 中不连通.因此在 G 中必存在某条从 u 到 v 的路 p 经过 e.设 x 和 y 是 e 的端点,并且在 p 上 x 前于 y,在 $G-e$ 中,u 被 p 的一段连到 x,y 被 p 的一段连到 v.若 e 在某圈 C 中,则在 $G-e$ 中 x 和 y 将被路 $C-e$ 所连.于是,u 和 v 在 $G-e$ 中就连通了,导致矛盾.

反之,假设 e 不是 G 的割边(不妨设 e 的端点为 x,y),则 $\omega(G-e)=\omega(G)$.由于在 G 中存在一条 xy 路,所以 x 和 y 都在 G 的同一个分支中.由此推知:x 和 y 在 $G-e$ 的同一个分支中,从而在 $G-e$ 中存在一条 (x,y) 路 p,于是 e 就位于 G 的圈 $p+e$ 中了.

定义 7.2.7 设无向图 G 为连通图,定义

$$\kappa(G)=\min\{|V_1|\,|\,V_1\text{ 是 }G\text{ 的点割集,或使 }G-V_1\text{ 为平凡图}\}.$$

称 $\kappa(G)$是 G 的**连通度**(或**点连通度**). 若 G 为非连通图,则规定 $\kappa(G)=0$. 对于任意图 G,若有 $\kappa(G)\geqslant k$,则称 G 为 **k-连通的**.

定义 7.2.8 设无向图 G 是非平凡的连通图,令

$$\lambda(G)=\min\{|E_1|\,|\,E_1\text{ 是 }G\text{ 的边割集}\}.$$

则称 $\lambda(G)$为 G 的**边连通度**. 若 G 为平凡图或非连通图,则规定 $\lambda(G)=0$. 对于任意图 G 若有 $\lambda(G)\geqslant r$,则称 G 为 **r 边-连通的**.

例 7.2.4 (1) 在图 7.2.2 中,它的点连通度为 1,它是 1-连通图,但不是 2-连通图;它的边连通度为 1,它是 1 边-连通图,但不是 2 边-连通图.

(2) 彼得松图的点连通度为 3,它是 1-连通图、2-连通图、3-连通图,但不是 4-连通图;它的边连通度为 3,它是 1 边-连通图、2 边-连通图、3 边-连通图,但不是 4 边-连通图.

定理 7.2.5 对任何无向图 G,均有 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$.

证明 若 G 是平凡的,则 $\lambda(G)=0\leqslant\delta(G)$. 若 G 是非平凡图,则因每一结点的所有关联边必含一个边割集,故有 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$.

对 $\lambda(G)$用归纳法来证明 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$. 当 $\lambda(G)=0$ 时命题是正确的,因此,G 是平凡或不连通的. 现在假定命题对一切边连通度小于 k 的图均成立,并设 G 是 $\lambda(G)=k>0$ 的图,而 e 是G 的一个 k 边割集中的边,置 $H=G-e$,则 $\lambda(H)=k-1$. 因此,由归纳法假设知 $\kappa(H)\leqslant k-1$.

若 H 包含完全图作为其生成子图,则 G 也同样如此,而且

$$\kappa(G)=\kappa(H)\leqslant k-1.$$

否则,设 S 是 H 的具有$\kappa(H)$个元素的点割集,由于 $H-S$ 是不连通的,因此,或者 $G-S$ 是不连通的,并且

$$\kappa(G)\leqslant\kappa(H)\leqslant k-1,$$

或者 $G-S$ 是连通的,并且 e 是它的割边. 在后一情形,或者 $v(G-S)=2$ 并且

$$\kappa(G)\leqslant v(G)-1=\kappa(H)+1\leqslant k,$$

或者 $G-S$ 有割点 v,从而 $S\cup\{v\}$是 G 的点割集并且

$$\kappa(G)\leqslant\kappa(H)+1\leqslant k.$$

于是,在任一情形下,均有 $\kappa(G)\leqslant k=\lambda(G)$. 根据归纳法原理,结论成立.

定理 7.2.5 中的不等式通常是严格成立的. 例如,图 7.2.3 中的图 G 有 $\kappa(G)=2,\lambda(G)=3,\delta(G)=4$.

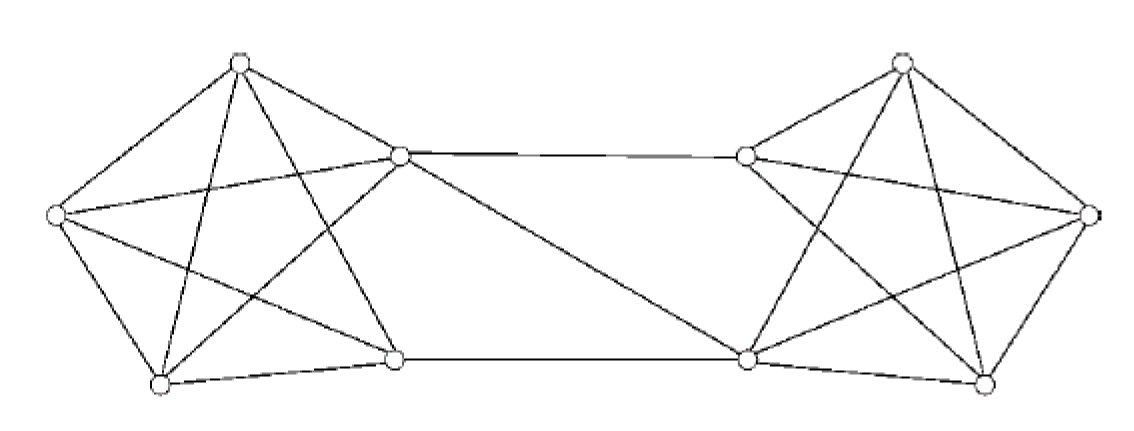


图 7.2.3

下面讨论有向图的连通性.

定义 7.2.9 设 $D=\langle V,E\rangle$为一个有向图,$\forall v_i,v_j\in V$,若从 v_i 到 v_j 存在通路,则称

v_i 可达 v_j，记作 $v_i \to v_j$. 规定 v_i 总是可达自身的，即 $v_i \to v_i$. 若 $v_i \to v_j$ 且 $v_j \to v_i$，则称 v_i 与 v_j 是相互可达的，记作 $v_i \leftrightarrow v_j$. 规定 $v_i \leftrightarrow v_i$.

$\to$ 与 $\leftrightarrow$ 都是 V 上的二元关系，并且不难看出 $\leftrightarrow$ 是 V 上的等价关系.

定义 7.2.10 设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，$\forall v_i,v_j \in V$，若 $v_i \to v_j$，称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线，短程线的长度为 v_i 到 v_j 的**距离**，记作 $d\langle v_i,v_j\rangle$.

与无向图中顶点 v_i 与 v_j 之间的距离 $d(v_i,v_j)$ 相比，除无对称性外，$d\langle v_i,v_j\rangle$ 具有 $d(v_i,v_j)$ 所具有的一切性质.

定义 7.2.11 若有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 的基图是连通图，则称 D 是**弱连通图**，简称为**连通图**. 若 $\forall v_i,v_j \in V$，$v_i \to v_j$ 与 $v_j \to v_i$ 至少成立其一，则称 D 是**单向连通图**. 若 $\forall v_i,v_j \in V$，均有 $v_i \leftrightarrow v_j$，则称 D 是**强连通图**.

由定义可知，强连通图一定是单向连通图. 在图 7.2.4 中，(a) 为强连通图，(b) 为单向连通图，(c) 为弱连通图.

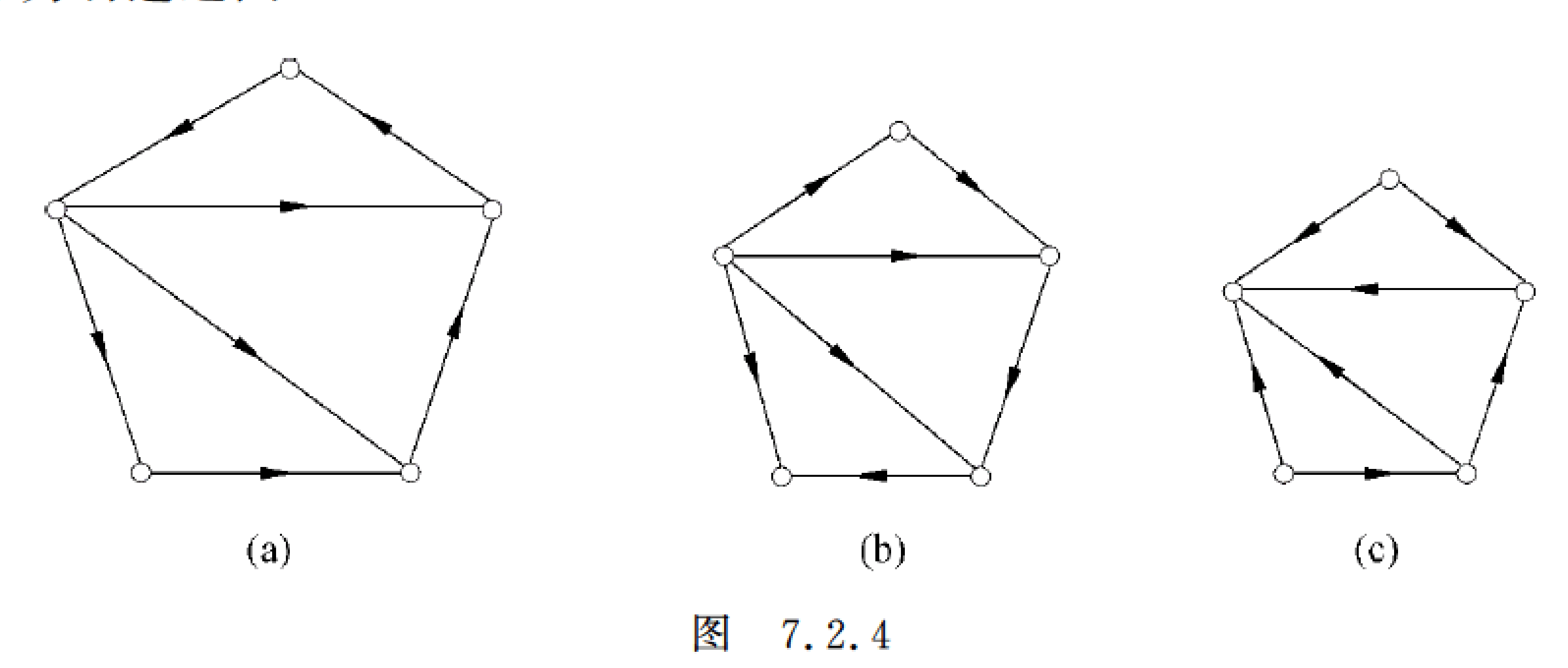


图 7.2.4

下面给出强连通图与单向连通图的判别定理.

定理 7.2.6 有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 是强连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证明 充分性显然. 下面证明必要性. 设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，由 D 的强连通性，$v_i \to v_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路 $(i=1,2,\cdots,n-1)$. 又因为 $v_n \to v_1$，设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路. 于是，依次连接 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_{n-1},\Gamma_n$ 所得到的回路经过 D 中每个顶点至少一次.

定理 7.2.7 有向图 D 是单向连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路.

证明略.

7.3 图的矩阵表示

图可以用集合来定义，还可以用矩阵来表示. 用矩阵表示图便于用代数方法研究图的性质. 为了用矩阵表示图，必须指定顶点或边的顺序，使其成为标定图. 本节中讨论无向图和有向图的关联矩阵及有向图的邻接矩阵和可达矩阵.

定义 7.3.1 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数，则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的**关联矩阵**，记作 $\boldsymbol{M}(G)$.

图 7.3.1 所示无向图 G 的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

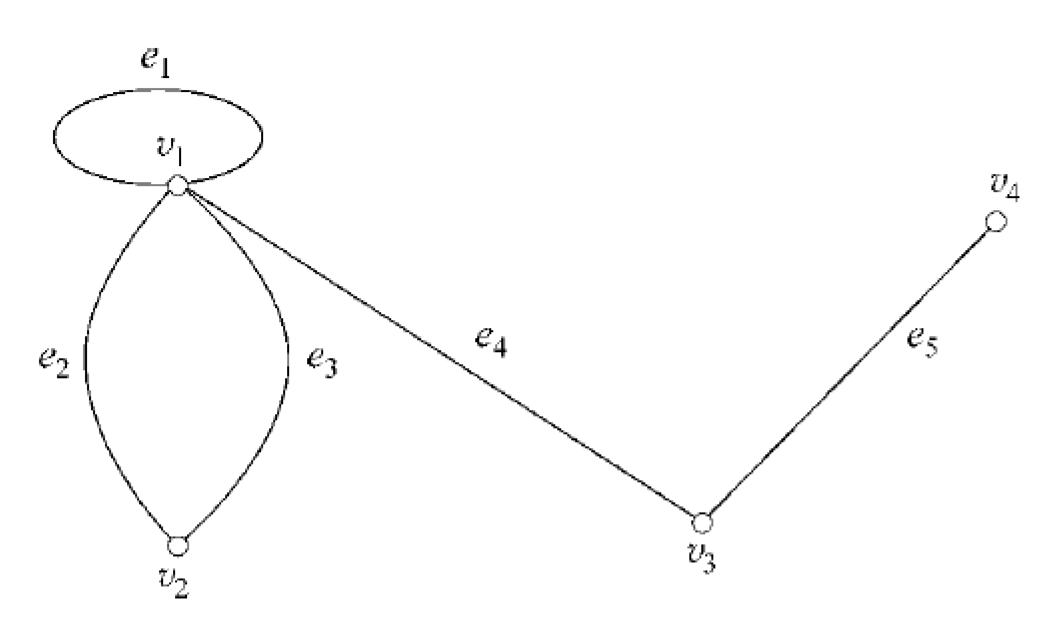


图 7.3.1

不难看出,关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$ 有以下性质:

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=2(j=1,2,\cdots,m)$,即 $\boldsymbol{M}(G)$ 每列元素之和均为 2,这是因为每条边恰好关联两个顶点(环所关联的两个顶点重合).

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=d(v_i)$,即 $\boldsymbol{M}(G)$ 第 i 行元素之和为 v_i 的度数,$i=1,2,\cdots,n$.

(3) $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=\sum_{j=1}^{m}2=2m$,这个结果正是握手定理的内容,即各顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

(4) 第 j 行与第 k 列相同当且仅当边 e_j 与 e_k 是平行边.

(5) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=0$ 当且仅当 v_i 是孤立点.

定义 7.3.2 设有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 中无环,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 为 } e_i \text{ 的始点},\\0, & v_i \text{ 与 } e_i \text{ 不关联},\\-1, & v_i \text{ 是 } e_i \text{ 的终点},\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的**关联矩阵**,记作 $\boldsymbol{M}(D)$.

图 7.3.2 所示图 D 的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{M}(D)$ 有如下性质:

(1) 每一列恰好有一个 $+1$ 和一个 -1.

(2) -1 的个数等于 $+1$ 的个数,都等于边数 m,这正是有向图握手定理的内容.

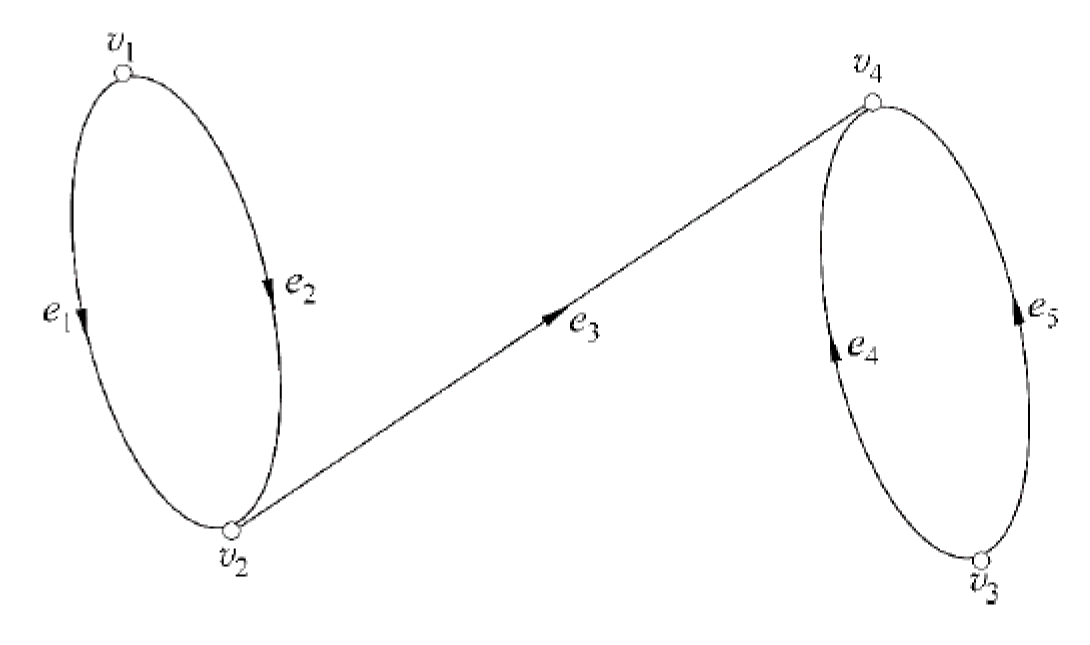


图 7.3.2

(3) 第 i 行中，+1 的个数等于 $d^+(v_i)$，−1 的个数等于 $d^-(v_i)$.

(4) 平行边所对应的列相同.

定义 7.3.3 设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 D 的**邻接矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}(D)$，或简记为 $\boldsymbol{A}$.

图 7.3.3 所示有向图 D 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

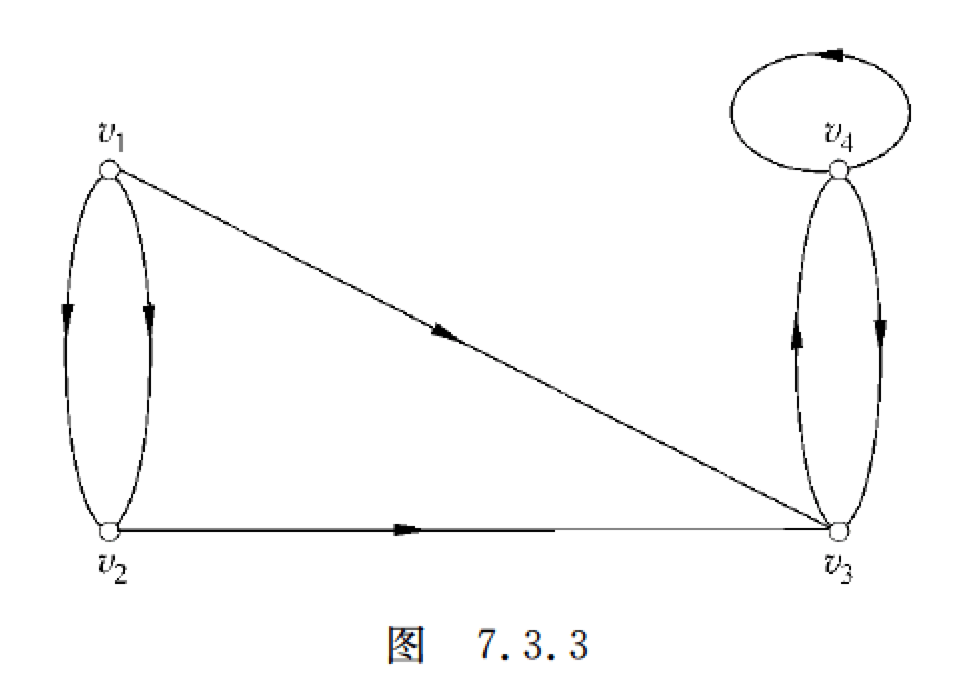


图 7.3.3

有向图的邻接矩阵有以下性质：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i),\quad i=1,2,\cdots,n;\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

于是，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = m$，$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} d^-(v_j) = m$，即 $\boldsymbol{A}(D)$ 中所有元素之和等于边数，这也正是有向图的握手定理.

上述性质表明，$\boldsymbol{A}(D)$ 中所有元素之和为 D 中长度为 1 的通路(即边)的条数，$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ 为 D 中长度为 1 的回路(即环)的条数. 现在考虑 $\boldsymbol{A}(D)$ 的 2 次幂 $\boldsymbol{A}^2=(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(1)}a_{kj}^{(1)}$. 对每一个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，$a_{ik}^{(1)}a_{kj}^{(1)}$ 等于顶点 v_i 邻接到顶点 v_k 的边数乘以顶点 v_k 邻接到顶点 v_j 的边数，即顶点 v_i 到顶点 v_j 的长度为 2 的通路的条数. 从而 $\boldsymbol{A}^2$ 的元素之和

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(2)}$ 等于 D 中所有长度为 2 的通路数. 这里的通路可以是复杂通路，包括回路在内，且是在定义的意义下计数的. 而 $a_{ii}^{(2)}$ 为 v_i 到自身长度为 2 的回路数，$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(2)}$ 等于 D 中所有长度为 2 的回路数. 根据这个思路不难用归纳法证明下述定理.

定理 7.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 D 的邻接矩阵，D 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{A}^l(l\geqslant 1)$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 $\boldsymbol{B}_l=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^l\ (l\geqslant 1)$，则 $\boldsymbol{B}_l$ 中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数，其中 $\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数.

前面已经计算出图 7.3.3 所示有向图 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$，下面给出 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\boldsymbol{A}^4$.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}.$$

从 $\boldsymbol{A}^1$ 到 $\boldsymbol{A}^4$ 不难看出，D 中 v_2 到 v_4 长度为 1,2,3,4 的通路分别为 0,1,1,2 条. v_4 到自身长度为 1,2,3,4 的回路分别为 1,2,3,5 条，其中有复杂回路. D 中长度小于或等于 4 的通路有 53 条，其中有 15 条回路.

定义 7.3.4 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{ 可达 }v_j,\\0, & \text{否则}.\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的可达矩阵，记作 $\boldsymbol{P}(D)$，简记为 $\boldsymbol{P}$.

由于 $\forall v_i\in V, v_i\rightarrow v_i$，所以 $\boldsymbol{P}(D)$ 主对角线上的元素全为 1.

由图 7.3.2 和图 7.3.3 所示有向图的可达矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

由定理 7.2.1 和定理 7.3.1 的推论可知，只要计算出 $\boldsymbol{B}_{n-1}$，由 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 的元素 $b_{ij}^{(n-1)}(i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j)$ 是否为 0 就可以写出有向图 D 的可达矩阵. 不过 p_{ii} 总为 1 $(i=1,2,\cdots,n)$，它与 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 无关.

7.4 欧拉图

1736 年，瑞士数学家列昂哈德·欧拉发表了第一篇图论的论文"哥尼斯堡七桥问题."这个问题是这样的：哥尼斯堡城市有一条横贯全城的普雷格尔河，城的各部分用七座桥连

接(如图 7.4.1(a)所示),每逢假日,城中居民进行环城逛游,这样就产生了一个问题,能不能设计一个“遍游”,使得从某地点出发对每座跨河桥只走一次,遍历了七桥之后又回到原地.

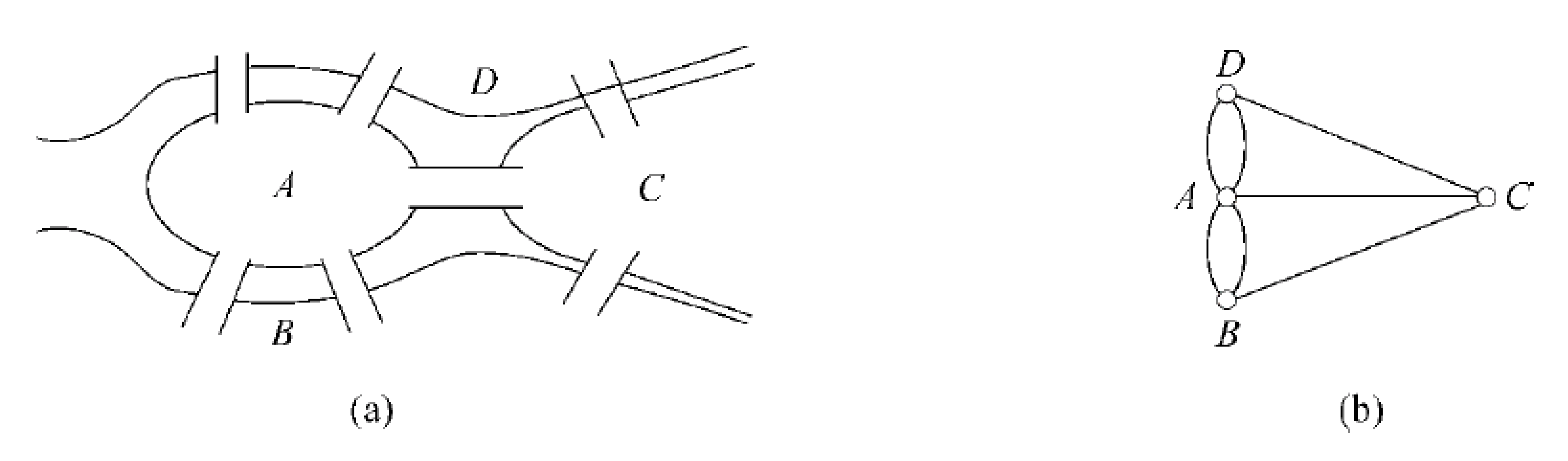


图 7.4.1

欧拉于 1736 年解决了上述问题,他将四块地与七座桥间的关系抽象成图,其中四块地分别抽象成四个顶点,而两陆地之间的桥抽象成边,如图 7.4.1(b)所示.这样,上述哥尼斯堡七桥问题转化为图 7.4.1(b)中是否存在经过每条边一次且仅一次的回路问题了,从而使得问题简化.在此基础上,欧拉得出了哥尼斯堡七桥问题是无解的.

欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题的论文中,提出并解决了一个更具有一般性的问题:在满足什么条件下,图 G 可以找到一条通过 G 中每条边一次且仅一次的回路呢?具有这种特点的图我们称之为欧拉图.

定义 7.4.1 通过图(无向图或有向图)中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称为**欧拉通路**.通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为**欧拉回路**.具有欧拉回路的图称为**欧拉图**.具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为**半欧拉图**.

注 以上定义既适合无向图,又适合有向图.平凡图是欧拉图.

从上面定义可以看出,图 G 的欧拉通路或欧拉回路恰好经过 G 的每条边各一次.一笔画游戏与欧拉通路或欧拉回路有着十分密切的联系.所谓一笔画问题就是:笔不离开纸,每边只能画一次,不允许重复,将图画出,称该图能一笔画出.一笔画与欧拉回路或欧拉通路之间有下述关系:

(1) 一个图如果能够一笔画出,并且终点回到起点,则等价于该图存在欧拉回路;

(2) 一个图如果能够一笔画出,但终点与起点不同,则等价于该图仅存在欧拉通路;

(3) 如该图不能一笔画出,则等价于该图不存在欧拉通路和欧拉回路.

例如图 7.4.2 给出了三类型的图.

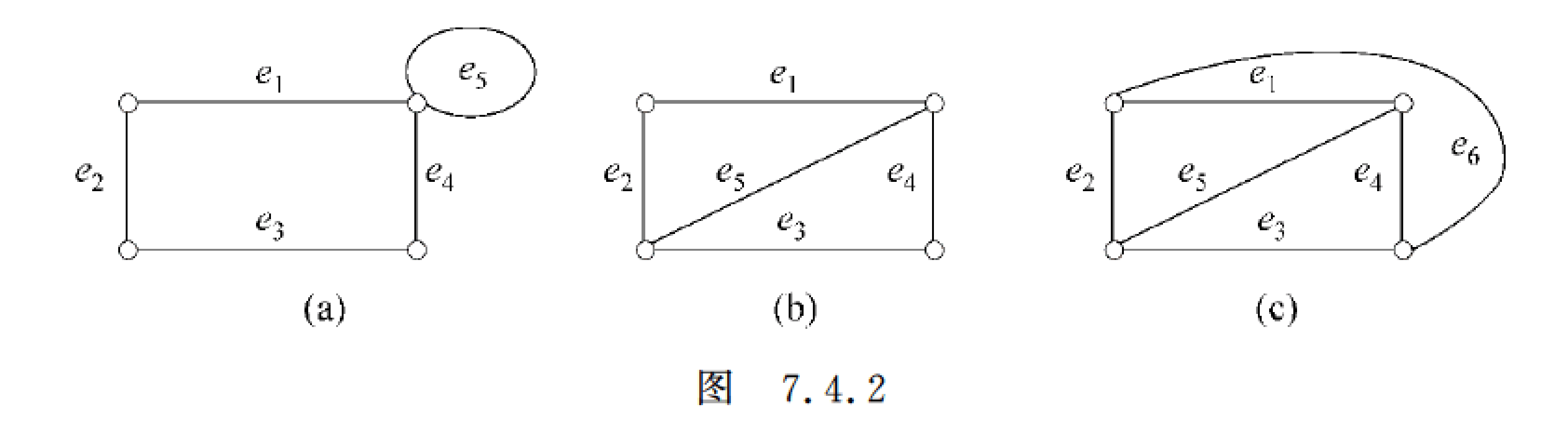


图 7.4.2

定理 7.4.1 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且没有奇度顶点.

证明 若 G 为平凡图,结论显然成立.

若 G 为非平凡图,设 G 是 m 条边的 n 阶无向图,其顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

必要性. 因为 G 为欧拉图,所以图 G 存在欧拉回路,设 C 为 G 中任意一条欧拉回路. $\forall v_i,v_j\in V$,v_i,v_j 都在 C 上,因而 v_i,v_j 连通,所以 G 为连通图. 又 $\forall v_i\in V$,v_i 在 C 上每出现一次获得 2 度,若出现 k 次就获得 $2k$ 度,即 $d(v_i)=2k$,所以 G 中无奇度顶点.

充分性. 因为 G 为非平凡的连通图,边数 $m\geqslant 1$. 对 m 作归纳证明.

(1) $m=1$ 时,由 G 的连通性及无奇度顶点可知,G 只能是一个环,因而 G 为欧拉图.

(2) 设 $m\leqslant k(k\geqslant 1)$ 时结论成立,下面证明 $m=k+1$ 时,结论也成立. 由 G 是连通图且无奇度顶点,$\delta(G)\geqslant 2$. 可以证明 G 中必含圈,设 C 为 G 中一个圈. 删除 C 上的全部边,得 G 的生成子图 G'. 设 G' 有 s 个连通分支 $G_1',G_2',\cdots,G_s'$,每个连通分支至多有 k 条边,且无奇度顶点. 设 G_i' 与 C 的公共顶点为 $v_{j_i}^*$,$i=1,2,\cdots,s$. 由归纳假设可知,$G_1',G_2',\cdots,G_s'$ 都是欧拉图,因而都存在欧拉回路. 设 C_i 为 G_i' 中一条欧拉回路,$i=1,2,\cdots,s$. 从某个顶点 v_r 开始沿 C 行走,每遇到 $v_{j_i}^*$,就行遍 C_i,回到 $v_{j_i}^*$ 再继续沿 C 行走,最后回到 v_r,得到一条回路 $v_r\cdots v_{j_1}^*\cdots v_{j_1}^*\cdots v_{j_2}^*\cdots v_{j_2}^*\cdots v_{j_s}^*\cdots v_{j_s}^*\cdots v_r$,此回路经过 G 中每条边一次且仅一次并行遍 G 中所有的顶点,它是 G 中的一条欧拉回路(见图 7.4.3),得证 G 为欧拉图.

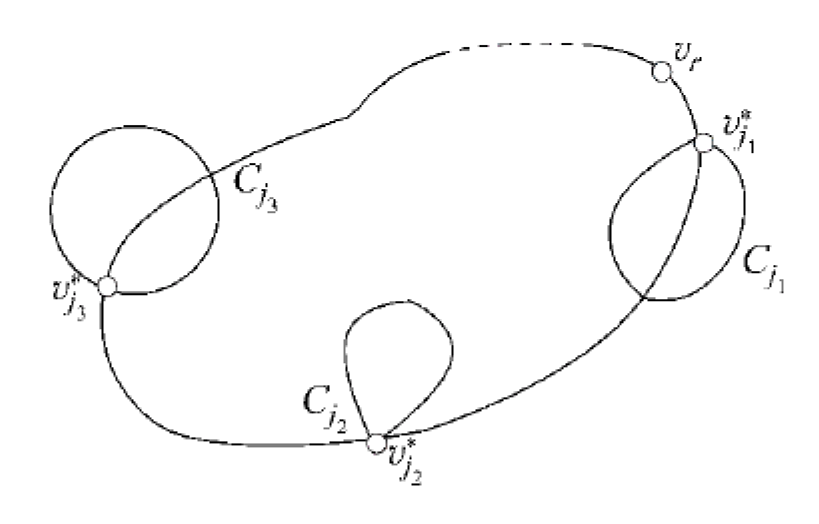


图 7.4.3

定理 7.4.2 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

证明 必要性. 设 G 是 m 条边的 n 阶无向图,因为 G 是半欧拉图,因而 G 中存在欧拉通路(但不存在欧拉回路). 设 $\Gamma=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}\cdots v_{i_{m-1}}e_{j_m}v_{i_m}$ 为 G 中一条欧拉通路,$v_{i_0}\neq v_{i_m}$. G 的连通性是显然的. $\forall v\in V(G)$,若 v 不是 Γ 的端点,设它在 Γ 中出现 $k(k\geqslant 1)$ 次,每次获得 2 度,故 $d(v)=2k$;若 v 是 Γ 的端点,由于 2 个端点是不同的且不相邻,v 作为端点只能出现一次,获得 1 度,它还可能作为非端点出现若干次,每次获得 2 度,故 $d(v)$ 为奇数.

充分性. 设 G 的两个奇度顶点分别为 u_0 和 v_0,对 G 加新边 (u_0,v_0),得 $G'=G\cup(u_0,v_0)$,则 G' 连通且无奇度顶点. 由定理 7.4.1,G' 为欧拉图,因而存在欧拉回路 G',而 $C=C'-(u_0,v_0)$ 为 G 中一条欧拉通路,得证 G 是半欧拉图.

由定理 7.4.2,图 7.4.2 中(b)是半欧拉图,但(c)不是半欧拉图.

对于有向图,类似地有下述定理.

定理 7.4.3 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

定理 7.4.4 有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且恰有两个奇度顶点,其中一个顶点的入度比出度大 1,另一个顶点出度比入度大 1,而其余顶点的入度等于出度.

例如,图 7.4.4 所示 3 个有向图中,只有(a)是欧拉图,没有半欧拉图.

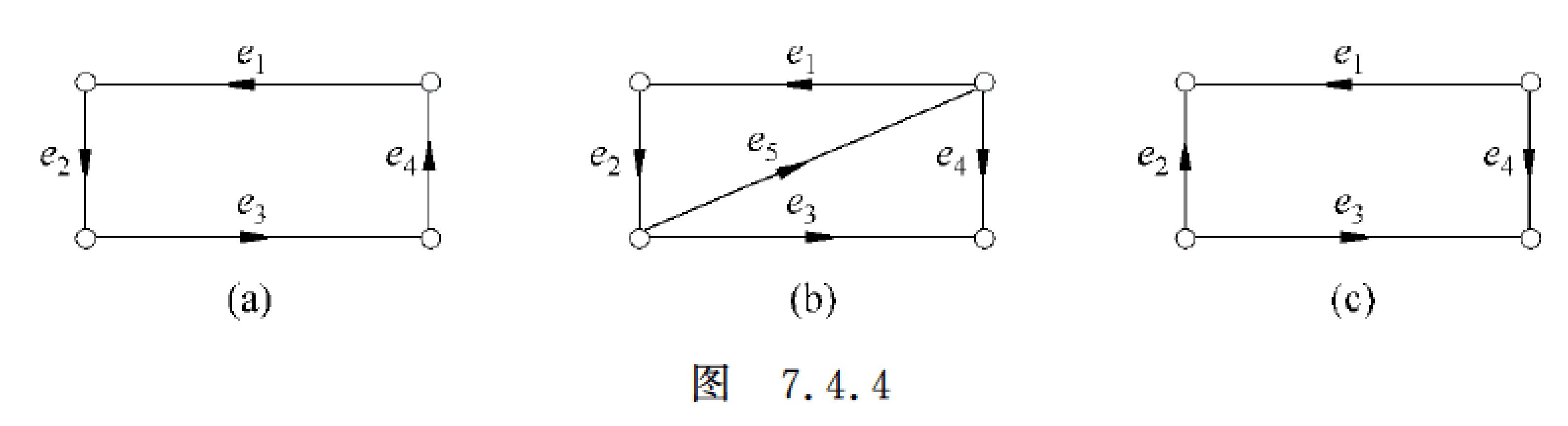


图 7.4.4

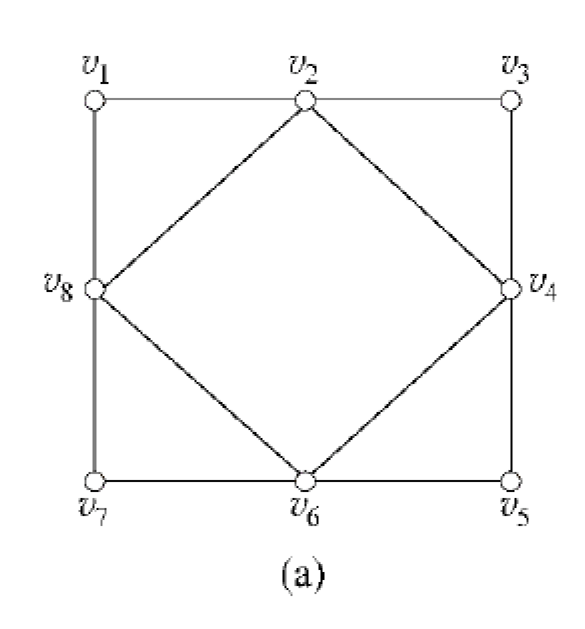
由定理 7.4.1,图 7.4.5(a)图为欧拉图,本图既可以看成圈

$$v_1v_2v_8v_1,v_2v_3v_4v_2,v_4v_5v_6v_4,v_6v_7v_8v_6$$

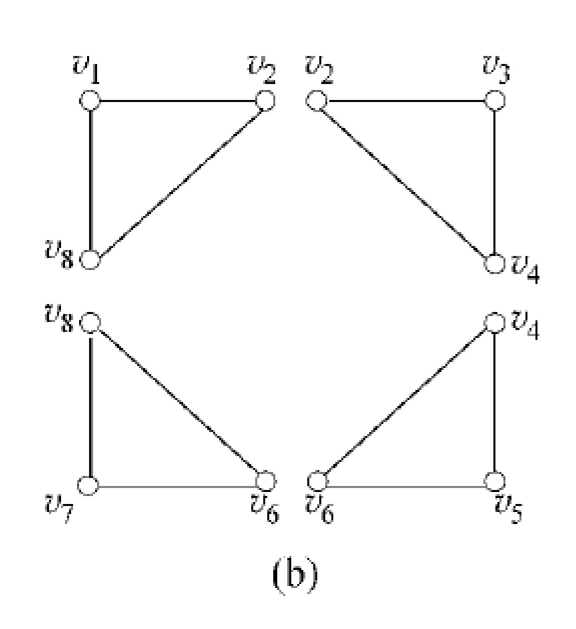
的并(将 4 个圈画在图(b)中),也可看成圈

$$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1 \quad 与圈 \quad v_2v_4v_6v_8v_2$$

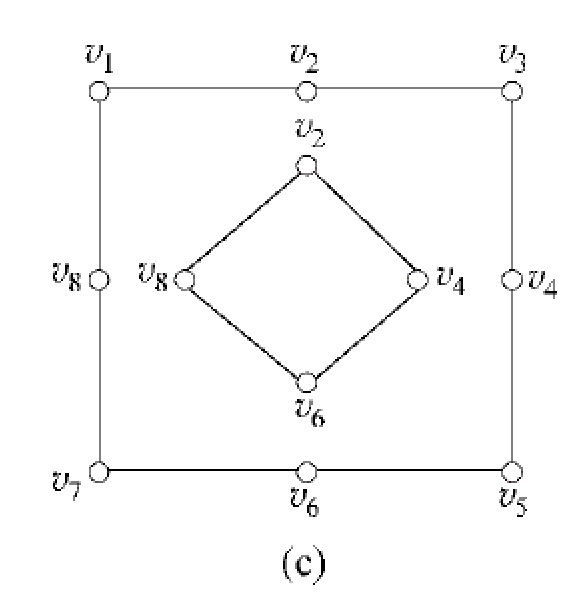
之并(两个圈画在图(c)中). 将图(a)分解成若干个边不重的圈的并不是图(a)所特有的性质,任何欧拉图都有这个性质.



(a)



(b)



(c)

图 7.4.5

定理 7.4.5 G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并.

本定理可用归纳法证明.

证明 必要性 只需证明 G 不是 1 边-连通图,即证明 G 的任意一边 e 都不是桥. 设 C 是一条欧拉回路,e 在 C 上,因而 $p(G-e)=p(G)$,故 e 不是桥.

充分性 采用构造性证明,它提供了一种求欧拉回路的算法——逐步插入回路法. 下面介绍另一种更简单的求欧拉回路的算法——Fleury 算法,它的基本思想是能不走桥就不走桥.

Fleury 算法:

(1) 任取 $v_0=\in V(G)$,令 $P_0=v_0$,$i=0$.

(2) 设 $P_i=v_0e_1v_1e_2\cdots e_iv_i$. 如果 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边,则计算停止;否则按下述条件从 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}:

① e_{i+1} 与 v_i 相关联;

② 除非无别的边可供选择,否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中的桥.

设 $e_{i+1}=(v_i,v_{i+1})$,把 $e_{i+1}v_i$ 加入 P_i 得到 P_{i+1}.

(3) 令 $i=i+1$,返回(2).

可以证明,当算法停止时所得简单回路 $P_m=v_0e_1v_1e_2\cdots e_mv_m$ $(v_m=v_0)$ 为 G 中一条欧拉回路.

例 7.4.1 图 7.4.6(a)是一个欧拉图. 用 Fleury 算法在这个图中找欧拉回路时,走了简单回路 $v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_9v_2$ 之后,无法进行下去,试分析在哪步犯错误了.

解 记这个图为 G. 当走到 v_8 时,$G-\{e_2,e_3,e_{14},e_{10},e_1,e_8\}$ 如图 7.4.6(b)所示. 此时 e_9 为该图中的桥,而 e_7,e_{11} 均不是桥. 不应该走 e_9,而应该走 e_7 或 e_{11}. 而选择了 e_9,这一步违反了算法中(2)的条件②,即能不走桥就不走桥的规定. 正确的走法是

$$v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_{11}v_9e_{12}v_6e_{13}v_4e_4v_5e_5v_6e_6v_7e_7v_8e_9v_2.$$

注意,在 v_3 处选择 e_3,在 v_1 处选择 e_8 等,当时 e_3,e_8 都是桥,但当时除这些桥之外无别的路可走. 按照算法,只有在这种情况下才可以选择桥. 同样的道理,当第一次走到 v_6 时必须选择 e_{13} 或 e_5,而不能选择 e_6.

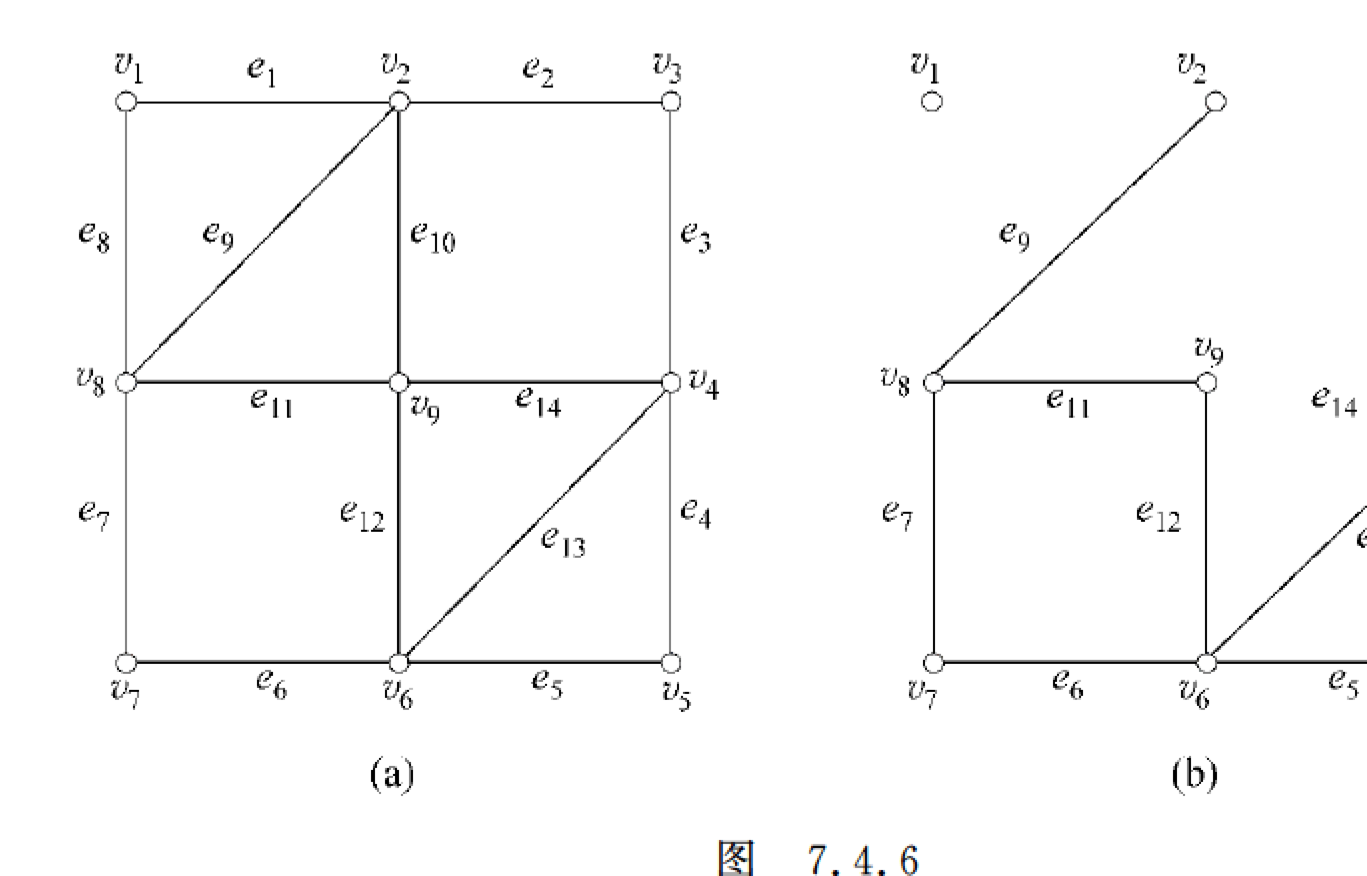


图 7.4.6

7.5 哈密顿图

与欧拉回路相类似的问题是哈密顿回路问题. 这个问题是哈密顿(Hamilton)爵士在1857年发明的智力题. 在给他的朋友的一封信中描述了一个关于木质十二面体(见图7.5.1)的数学游戏：一个人在十二面体的任意五个相继的顶点上插上五根大头针,形成一条路,要求另一个人扩展这条路以形成一个经过所有顶点的圈(称这样的圈为**生成圈**). 十二面体的20个顶点用世界上的不同城市作标记. 智力题要求从一个城市开始,沿十二面体的边旅行,访问其他19个城市每个恰恰只有一次,回到第一个城市结束. 他把这个问题称为周游世界问题.

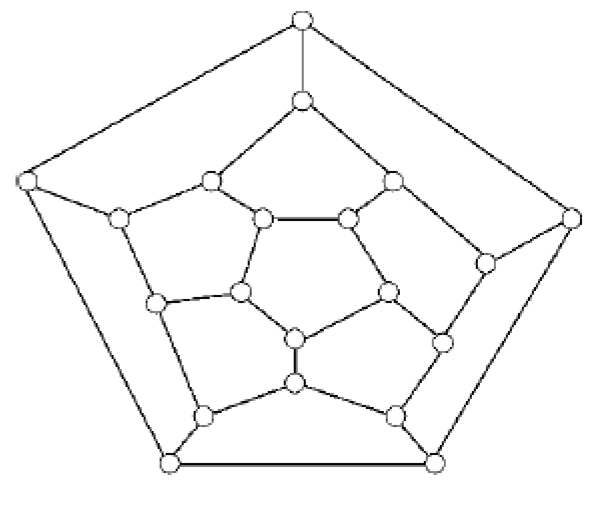


图 7.5.1

对于任何一个连通图都可以提出类似的问题.

定义 7.5.1 在图 G 中,经过 G 的每个顶点的路称为 G 的**哈密顿路**,经过 G 的每个顶点的圈称为 G 的**哈密顿回路**,具有哈密顿回路的图称为**哈密顿图**. 具有哈密顿路但不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图.

注 平凡图都是哈密顿图.

例 7.5.1 画出含4个顶点的连通图分别是：

(1) 哈密顿图和欧拉图；

(2) 哈密顿图和半欧拉图；

(3) 哈密顿图但不是半欧拉图；

(4) 欧拉图和半哈密顿图；

(5) 欧拉图但不是半哈密顿图；

(6) 半欧拉图和半哈密顿图.

解 如图7.5.2所示,(1)连通图为(a),(2)连通图为(b),(3)连通图为(c),(4)、(5)不存在满足此条件的图,(6)连通图为(d).

首先给出判断一个图具有哈密顿路的充分条件.

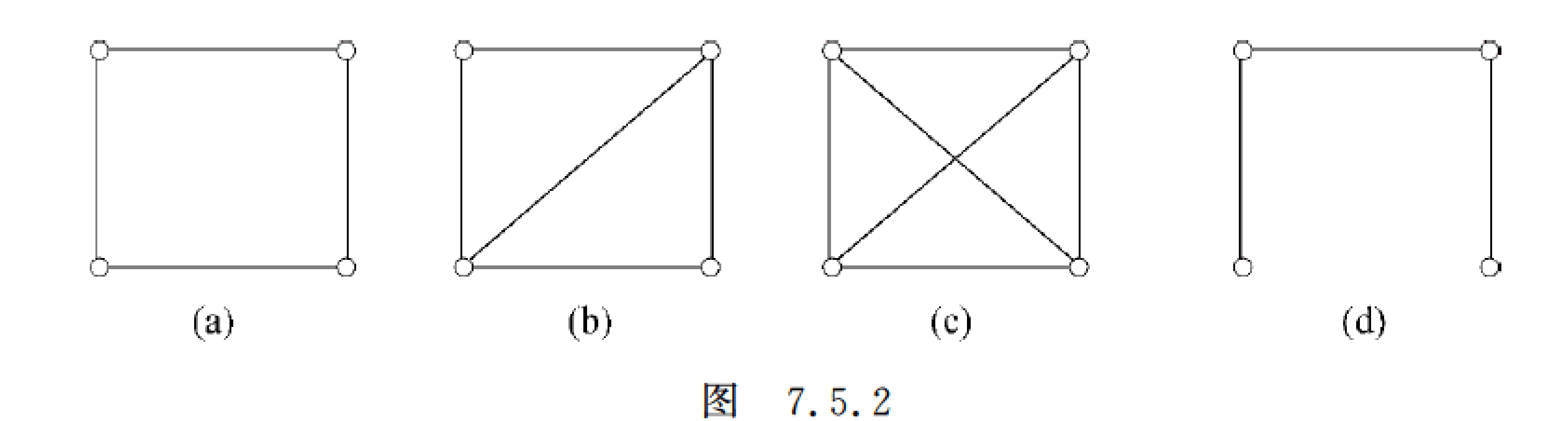


图 7.5.2

定理 7.5.1 设图 G 是有 n 个顶点的简单图，u,v 是图 G 的任意两顶点，如果 $d(u)+d(v)\geqslant n-1$，则图 G 存在一条哈密顿路.

证明 首先证明图 G 是连通图. 若图 G 有两个或更多互不连通的分图，设一个分图含有 n_1 个结点，任取一个结点 v_1. 另一个分图含有 n_2 个结点，任取一个结点 v_2. 由题知 $d(v_1)\leqslant n_1-1$，$d(v_2)\leqslant n_2-1$，故有 $d(v_1)+d(v_2)\leqslant n_1+n_2-2<n-1$，这与题设矛盾，故图 G 为连通图.

其次，我们从一条边出发构造一条路，证明它是哈密顿路.

设图 G 中有 $p-1$ 条边的路，$p<n$，结点序列为 $v_1,v_2,\cdots,v_p$. 如果有 v_1 或 v_p 邻接于不在这条路上的一个结点，我们可以扩展这条路，使它包含这一个结点，从而得到 p 条边的路. 否则，v_1 和 v_p 都只邻接于这条路上的结点，我们证明在这种情况下，存在一条回路包含结点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$. 若 v_1 邻接于 v_p，则 $v_1,v_2,\cdots,v_p,v_1$ 即为所求的回路. 假设与 v_1 邻接的结点集是 $\overbrace{\{v_1,v_m,\cdots,v_j,\cdots,v_t\}}^{k}$，这里 $2\leqslant l,m,\cdots,j,\cdots,t\leqslant p-1$. 如果 v_p 是邻接于 v_{l-1}，$v_{m-1},\cdots,v_{j-1},\cdots,v_{i-1}$ 中之一，譬如说 v_{j-1}，如图 7.5.3(a)所示，$v_1v_2v_3\cdots v_{j-1}v_pv_{p-1}\cdots v_jv_1$ 是所求的包含结点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 的回路.

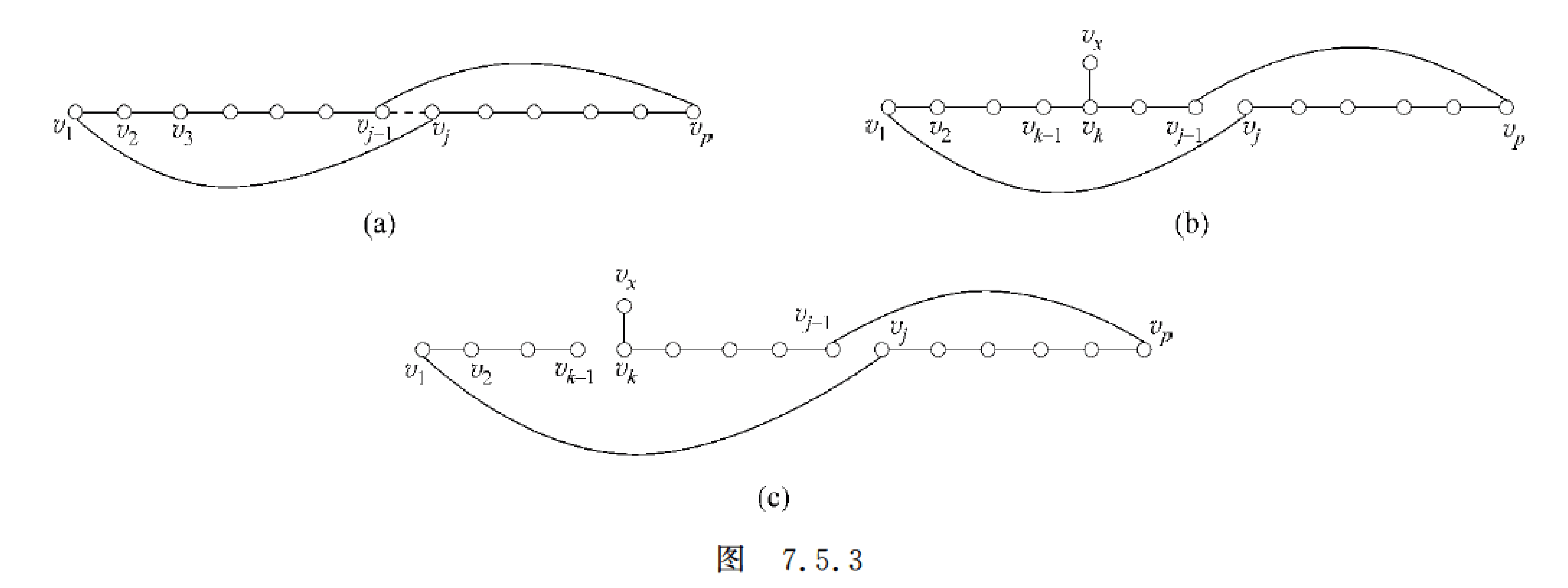


图 7.5.3

如果 v_p 不邻接于 $v_{l-1},v_{m-1},\cdots,v_{l-1}$ 中的任一个，则 v_p 至多邻接于 $p-k-1$ 个结点，$d(v_p)\leqslant p-k-1$，$d(v_1)=k$，故 $d(v_p)+d(v_1)\leqslant p-k-1+k=p-1\leqslant n-1$，即 v_1 与 v_p 度数之和至多为 $n-2$，矛盾.

至此，我们有包含所结点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 的一条回路，因为 G 是连通的，所以在 G 中必有一个不属于该回路的结点 v_x 与 $v_1v_2\cdots v_p$ 中的某一个结点 v_k 邻接，如图 7.5.3(b)所示，于是就到一条包含 p 条边的路($v_x,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{j-1},v_p,v_{p-1},\cdots,v_j,v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}$). 如图 7.5.3(c)所示，重复前面构造方法，直至得到 $n-1$ 条边的路.

例 7.5.2 在七天内安排七门课程的考试，使得同一位教师所担任的两门课程考试不

安排在连续的两天,试证如果没有教师担任多于四门课程,则满足上述要求的考试安排总是可能的.

证明 设图 G 含有七个顶点,每一个顶点对应一门课程的考试,如果这两个顶点对应的课程的考试是由不同教师担任的,那么这两个顶点之间用边连接.由于每个教师所任的课程不超过 4 门,所以每个顶点的度数至少是 3,任两个顶点度数的和大于等于是 6,故图 G 总含一条哈密顿路,即对应于一个七门考试科目的一个适当安排.

例 7.5.3 某地有 5 个风景点,如果每个风景点都有两条道路与其他风景点相通.问游人可否经过每个风景点一次且仅一次而游完这 5 处?

解 将 5 个风景点抽象成是 5 个顶点,任两风景点间的道路看成是无向边,则得到含有 5 个顶点的无向图. 因为每个顶点有两条边与其他顶点相通,故每个顶点的度数均大于等于 2,从而任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于 4,正好为总顶点数减 1.故此图中存在一条哈密顿通路,因此本题有解.

与欧拉图的情形相反,到目前为止,人们还没有找到判断一个图为哈密顿图的充分必要条件.我们首先给出一个判定哈密顿图的一个简单而有效的必要条件.

定理 7.5.2 设无向图 G 是哈密顿图,则对于 V 的每个非空真子集 S,均有

$$w(G-S)\leqslant|S|. \tag{7.5.1}$$

证明 设 C 是 G 的任意一条哈密顿圈,则对于 V 的每个非空真子集 S,均有

$$w(C-S)\leqslant|S|.$$

同时,$C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图,因而

$$w(G-S)\leqslant w(C-S).$$

定理得证.

上述定理给出哈密顿图判定的必要条件,但不是充分条件,可以验证彼得松(图 7.1.4(a))虽然满足定理中的条件,但是它不是哈密顿图.下面讨论无向图具有哈密顿路的充分条件.

现在讨论图是哈密顿图的充分条件.下面给出一个简单图是哈密顿图的判断条件.

我们从狄拉克(Dirac)给出的一个结果开始讨论.

定理 7.5.3 若 G 是含 n 个顶点的简单图,且 $n\geqslant3$,$\delta\geqslant n/2$,则 G 是哈密顿图.

证明 用反证法. 假设定理不成立,设 G 是 $n\geqslant3$ 和 $\delta\geqslant n/2$ 的极大(即边数达到最大)非哈密顿简单图. 由于 $n\geqslant3$,所以 G 不能是完全图. 设 u 和 v 是 G 的不相邻顶点,根据 G 的选择,$G+uv$ 是哈密顿图. 并且,由于 G 是非哈密顿图,$G+uv$ 的每个哈密顿圈必然包含边 uv,于是在 G 中存在起点为 $u=v_1$,终点为 $u=v_n$ 的哈密顿路 $v_1v_2\cdots v_n$. 置

$$S=\{v_i\mid uv_i\in E\}\quad 和\quad T=\{v_i\mid v_iv\in E\}.$$

由于 $v_n\notin S\cup T$,故有

$$|S\cup T|<n, \tag{7.5.2}$$

而且

$$|S\cap T|=0. \tag{7.5.3}$$

因为若 $S\cap T$ 包含某个顶点 v_i,则 G 将包含哈密顿圈,与假设矛盾(见图 7.5.4).

利用式(7.5.2)和式(7.5.3)得到

$$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<n. \tag{7.5.4}$$

但是这与 $\delta\geqslant n/2$ 的假设矛盾.

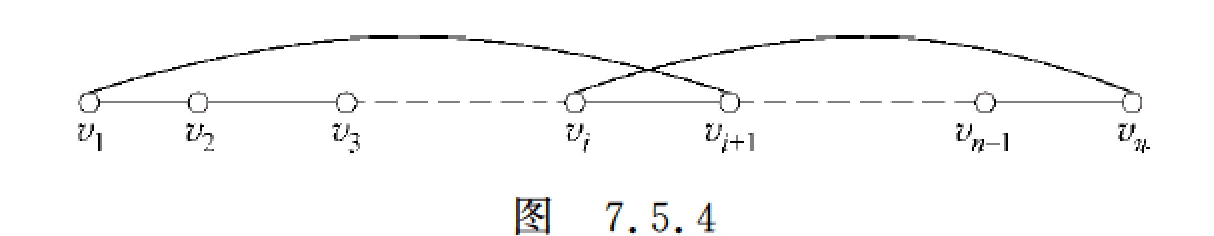


图 7.5.4

邦迪(Bondy)和赫瓦塔尔(Chvatal)于 1974 年发现定理 7.5.3 的证明可以修改,得到比狄拉克更有力的充分条件.他们的方法基于如下引理.

引理 7.5.1 设 G 是含 n 个顶点的简单图,u 和 v 是图 G 中不相邻的两顶点,且满足

$$d(u)+d(v)\geqslant n, \tag{7.5.5}$$

则 G 是哈密顿图的充分必要条件为 $G+uv$ 是哈密顿图.

证明 若 G 是哈密顿图,则显然 $G+uv$ 也是哈密顿图. 反之,假设 $G+uv$ 是哈密顿图,而 G 不是,那么类似定理 7.5.2 的证明,可得(7.5.4)式.这与假设条件(7.5.5)式矛盾.

引理 7.5.1 启发出下述定义:G 的**闭包**是指用下述方法从 G 中得到的一个图.反复连接 G 中度之和不小于 n 的不相邻的顶点对,直到没有这样的顶点对存在为止.用 $c(G)$ 表示 G 的闭包.

引理 7.5.2 图 G 的闭包 $c(G)$是唯一确定的.

证明 设 G_1 和 G_2 是用下述方法从 G 中得到的两个图:反复连接 G 中度之和不小于 n 的不相邻顶点对,直到没有这样的顶点对存在为止.用 $e_1e_2\cdots e_m$ 和 $f_1f_2\cdots f_p$ 分别表示在构造 G_1 和 G_2 过程中的那些添加给 G 的边的序列,我们将证明每条 e_i 是 G_2 的边,而每条 f_j 是 G_1 的边.

如有可能,设 $e_{k+1}=uv$ 是序列 $e_1e_2\cdots e_m$ 中第一条不属于 G_2 的边.置 $H=G+\{e_1e_2\cdots e_k\}$.从 G_1 的定义,在图 H 中有

$$d(u)+d(v)\geqslant n.$$

根据 e_{k+1}的选择,H 是 G_2的子图.因此在图 G_2中有

$$d(u)+d(v)\geqslant n.$$

这就导致矛盾,因为在 G_2中 u 和 v 是不相邻的.所以每条 e_i都是 G_2的边,并且类似地,每条 f_j也都是 G_1的边.因此 $G_1=G_2$,即 $c(G)$ 是唯一确定的.

图 7.5.5 表明了有五个顶点的一个图 G 的闭包的构造过程.在这个例子中 $c(G)$ 是完全图,但需要注意,这并不意味着闭包一定是完全图.

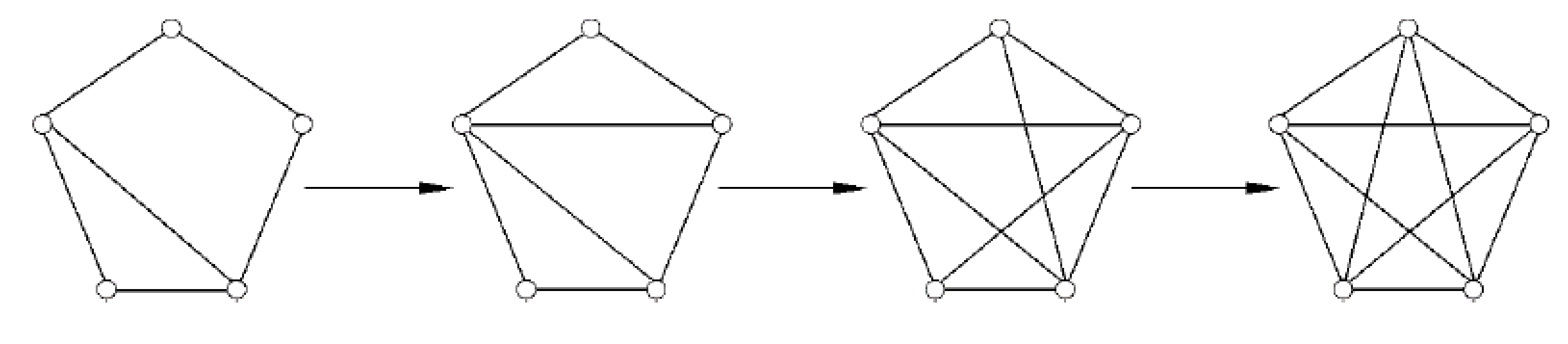


图 7.5.5

定理 7.5.4 一个简单图是哈密顿图当且仅当它的闭包是哈密顿图.

证明 在构造闭包的过程中,每添加一条边就应用一次引理 7.5.2,即可证明本定理.

容易看出,所有至少有 3 个顶点的完全图都是哈密顿图,因而由定理 7.5.3 可得下述结果.

推论 设 G 是含 n 个顶点的简单图($n\geqslant3$).若 $c(G)$是完全图,则 G 是哈密顿图.

7.6 应用举例

邮递员的工作是：从邮局出发，递送邮件，然后再返回邮局．显然，他必须经过他投递范围内的每一条街道至少一次．在这个前提下，希望选择一条尽可能短的路线．这个问题为中国邮递员问题．

定义 7.6.1 对图 G 的每一条边 e 可赋以一个实数 $w(e)$，称为 e 的**权**．G 连同其边上的权称为**赋权图**．在一个赋权图中，回路 $v_0e_1v_1\cdots,e_nv_0$ 的权定义为 $\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$．

显然，中国邮递员问题就是在具有非负权的赋权连通图中找出一条最小权的回路．这种回路就称为最优回路．

若 G 是欧拉图，则 G 的任何欧拉回路都是最优回路，因为欧拉回路是一条通过 G 的每条边恰好一次的回路．在这种情形下，中国邮递员问题是容易解决的，因为在欧拉图中，存在着确定欧拉回路的算法．弗洛伊德(Floyed)提出的算法，该算法通过依次描画一条迹的方法来构造欧拉回路，而这种描画满足条件：在每一步中，未描画的子图的割边当且仅当没有别的边可选择时才被描画．

下面给出另外一种构造欧拉回路的算法，即弗洛伊德算法．

算法 1 弗洛伊德算法：

```
procedure Floyed(G：带权简单图)
  {G 有顶点 v1,v2,…,vn 和权 w(vi,vj)}，其中若(vi,vj)不是边，则 w(vi,vj)=∞.
  for i :=1 to n
      for j :=1 to n
      d(vi,vj) :=w(vi,vj)
  for i :=1 to n
      for j :=1 to n
          for k :=1 to n
              if d(vj,vi)+d(vi,vk)<d(vj,vk)
              then d(vj,vk) :=d(vj,vi)+d(vi,vk)
{d(vi,vj)是在 vi 与 vj 之间的最短通路的长度}
```

根据这个算法可知，弗洛伊德算法作出 G 中的一条迹．下面的定理保证了弗洛伊德算法的正确性．

定理 7.6.1 若 G 是欧拉图，则 G 中任一用弗洛伊德算法作出的通路都是 G 的欧拉回路．

证明 设 G 是欧拉图，$w_n=v_0e_1v_1\cdots e_nv_n$ 是 G 中用弗洛伊德算法作出的迹．显然，终点 v_n 在 G_n 中的度必然为零．由此推知，$v_n=v_0$，换言之，w_n 是闭迹．

现在假设 w_n 不是 G 的欧拉回路，并且设 S 是 G_n 中度为正的顶点集．那么，S 是非空的，且 $v_n\in\overline{S}$，这里 $\overline{S}=V\backslash S$．设 m 是使得 $v_m\in S$ 以及 $v_{m+1}\in\overline{S}$ 的最大整数．由于 w_n 终止于 $\overline{S}$，所以 e_{m+1} 是 G_m 中$[S,\overline{S}]$的仅有的一条边，因此也就是 G_m 的一条割边(见图 7.6.1)．

设 e 是 G_m 中和 v_m 关联的另外任意一条边．可以推得(第 2 步)：e 必然也是 G_m 的一条

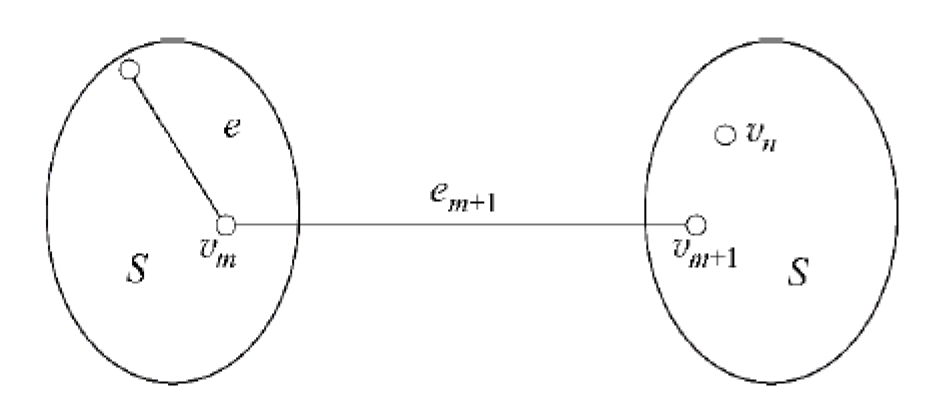


图 7.6.1

割边,因而是 $G_m[S]$ 的割边.但是由于 $G_m[S]=G_n[S]$,所以 $G_m[S]$ 中的每个顶点都是偶点.可是由此推出 $G_m[S]$没有割边,导致矛盾.

若 G 不是欧拉图,则 G 的任何回路,特别是 G 的最优回路,将通过某些边仅一次.例如,在图 7.6.2(a)中,$xuywvzwyxuwvxzyx$ 是最优回路,注意边 ux,xy,yw 和 wv 都被这条回路通过两次.

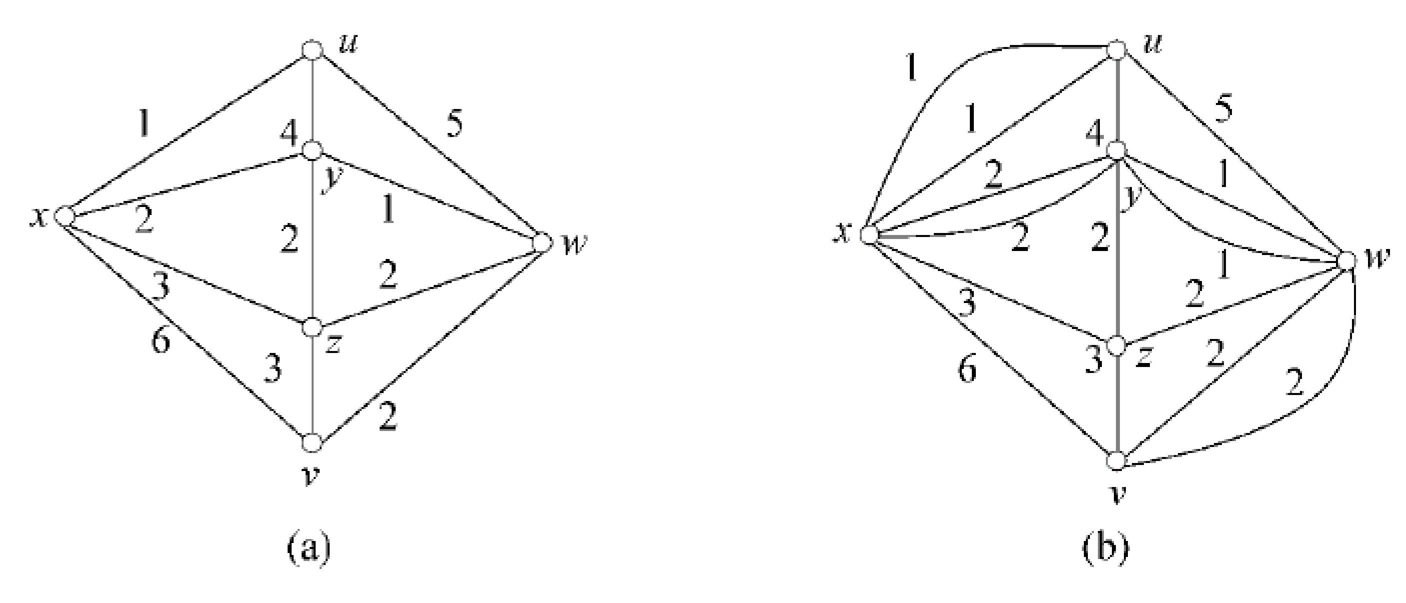


图 7.6.2

现在引进有关一条边的重复运算是方便的.将边 e 的两个端点再用一条权为 $w(e)$的新边连接时,称边 e 为重复的.在图 7.6.2(a)中,把边 ux、xy、yw 和 wv 重复,得到图 7.6.2(b)所表示的图.

现在可以把中国邮递员问题重新叙述如下:给定一个具有非负权的赋权图 G.

(1) 用添加重复边的方法求 G 的一个欧拉赋权母图 G^* 使得

$$\sum_{e\in E(G^*)\setminus E(G)} w(e) \text{ 尽可能的小;}$$

(2) 求 G^* 的欧拉回路.

这个问题和中国邮递员问题的等价性,可以从下述对应关系得到,即图 G 的一条经过边 e 为 $m(e)$次的回路,对应于由 G 对 e 重复 $m(e)-1$ 次而得到图中的一条欧拉回路,反之亦然.

哈密顿图与旅行售货商问题密切相关.问题是这样的:某售货商计划到许多城市去宣传产品,他想经过每个城市一次最后返回他的办公室,要求所用的时间最少.首先应对此问题进行建模,我们利用加权图,其中每个顶点代表一个城市,两个顶点相邻代表对应的城市存在直达公路,边上的正数,即权代表从边的一个端点到另一个端点的旅行时间.为了解决旅行售货商问题,我们需要在图中寻找具有最小权重之和的哈密顿图,此图称为最小加权哈密顿图.

旅行售货商问题可以借助图相关知识解决.下面给出最短路径算法,即迪杰斯特拉(Dijkstra)算法.此算法用于计算一个节点到其他所有节点的最短路径.主要特点是以起始

点为中心向外层层扩展，直到扩展到终点为止.

本算法采用标号表述方式，求给定起始点 s 到每一点的最短路径. 在计算过程中，赋予每一个顶点 v 一个标号 $l(v)=(l_1(v),l_2(v))$，在 v 的永久标号 $l(v)$ 中，$l_2(v)$ 是从 s 到 v 的距离，$l_1(v)$ 是 s 到 v 的最短路径上 v 的前一个顶点；当 $l(v)$ 是临时标号时，$l_1(v)$ 和 $l_2(v)$ 分别是当前从 s 经过永久标号的顶点到 v 的长度最短的路径上 v 的前一个顶点和这条路径的长度.

迪杰斯特拉算法：

(1) 设置 $l(s)=(s,0)$，$l(v)=(s,+\infty)$，$i=1$，$u=s$. ($v\in V-\{s\}$，$l(s)$ 是永久标号，其余标号均为临时标号)

(2) 循环所有与 u 关联的临时标号的顶点 v.

① 如果 $l_2(u)+w(u,v)<l_2(v)$ （$w(u,v)$ 是 u 与 v 两顶点间边的权值） 那么设置 $l(v)=(u,l_2(u)+w(u,v))$；

② 计算 $l_2(t)=\min\{l_2(v)\mid v\in V$ 且有临时标号$\}$，置 $l(t)$ 为永久标号；

③ 如果 $i<n$，那么设置 $u=t$，$i=i+1$.

(3) 对每一个顶点 u，$d(s,u)=l_2(u)$，利用 $l_1(v)$ 从 u 开始回溯找到 s 至 u 的最短路径.

(4) 算法结束.

如果用本算法求一个图中全部的最短路，则要以每个点为源点调用一次迪杰斯特拉算法. 至今还没有找到解决货郎担问题的更有效算法，它是众多 NP 难解问题中的一个.

例 7.6.1 在带权图 7.6.3 中，求从 a 到其余各点的最短路径和距离.

解 $aecb$，$d(a,b)=7$；

aec，$d(a,c)=5$；

ad，$d(a,d)=6$；

ae，$d(a,e)=2$.

例 7.6.2 现有一代理商要从她所住城市出发，乘坐飞机到 5 个城市，然后回到出发点. 如图 7.6.4 所示，顶点代表城市. h 是她所在的城市. 边代表城市间的直达航线. 问她怎么走才能访问每个城市一次且仅一次，最后回到原出发点？

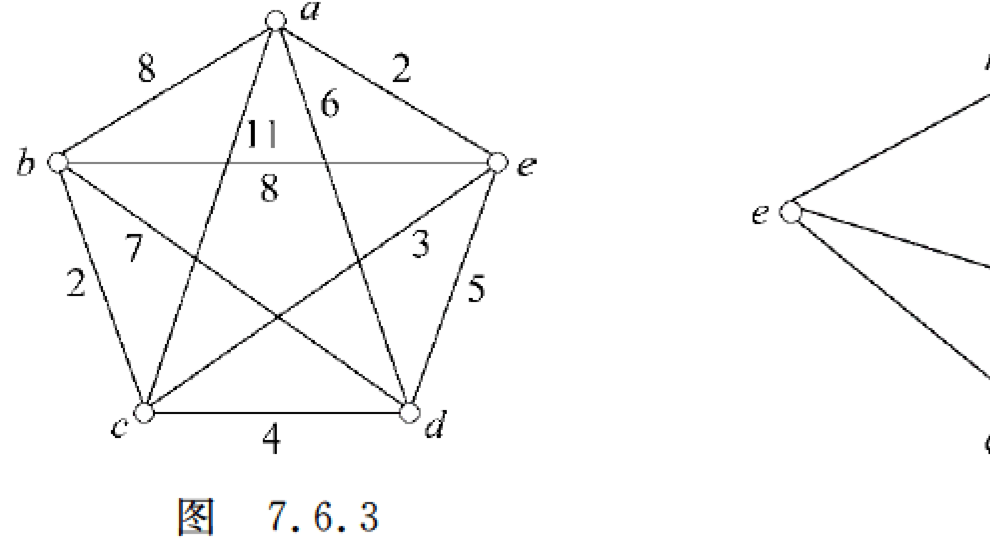


图 7.6.3

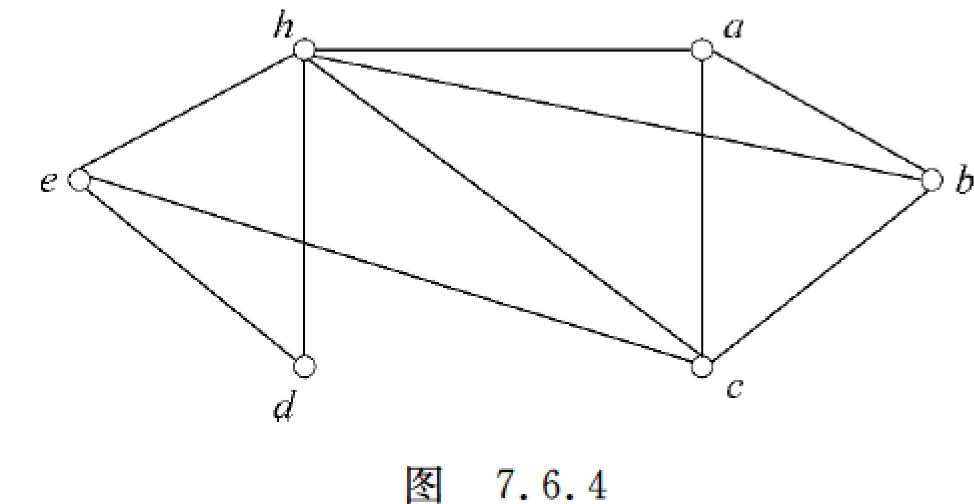


图 7.6.4

解 从图中我们可以看出，销售代表要到达城市 d，只能经由 h 或 e，因此她的飞行路线必须包括 ed 和 dh. 这就使得她必须走路线 ce，否则她就得走路线 eh，但这样一来就提早的形成了一个圈 $hdeh$. 同理，她也不能走路线 ch. 再通过简单的分析，找到两条可行的路线：cb，ba，ah 和 ca，ab，bh. 从而得到她的这个行程应为 $hdecbah$ 或者 $hdecabh$. 当然，她还可以将顺序颠倒，得到 4 条不同的巡回路线.

习 题 7

1. 给出下面 4 个图的集合表示，画出它们的图形表示：

(1) $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，其中

$V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E_1=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_3),(v_4,v_5)\}$；

(2) $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$，其中

$V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E_2=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_5,v_1),(v_4,v_5)\}$；

(3) $D_1=\langle V_3,E_3\rangle$，其中

$V_3=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E_3=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\langle v_3,v_2\rangle,\langle v_4,v_5\rangle,\langle v_5,v_1\rangle\}$；

(4) $D_2=\langle V_4,E_4\rangle$，其中

$V_4=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E_4=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_5\rangle,\langle v_5,v_2\rangle,\langle v_3,v_4\rangle,\langle v_4,v_3\rangle\}$.

2. 设图 G 的各点度数都是 3，且点数 n 与边数 m 之间有如下关系：

$$2n-3=m,$$

则 G 中点数 n 与边数 m 各为多少？

3. 设无向图 G 有 10 条边，3 度和 4 度顶点各 2 个，其余顶点度数均小于 3，则 G 至少有多少个顶点？在最少顶点的情况下，求出 G 的度数序列，最大度数 $\Delta(G)$ 和最小度数 $\delta(G)$.

4. 是否存在无向图，其度数序列分别为：

(1) 5,4,4,3,3,2,2；

(2) 4,4,3,3,2,2,2,2.

5. 画出度数序列为 3,2,2,1 的简单图和非简单图各一个.

6. 指出图 7.1 中的割点和桥.

7. 有向图 D 图 7.2 所示.

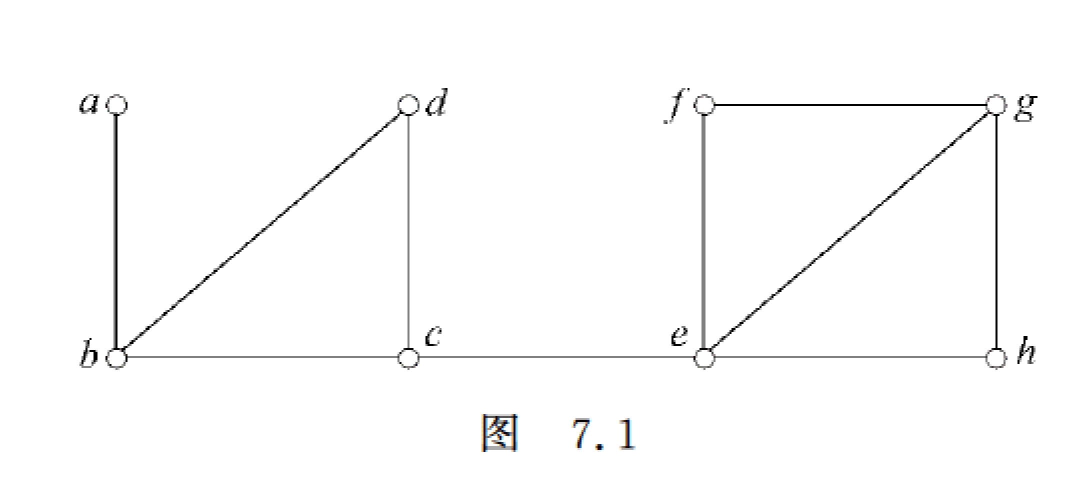


图 7.1

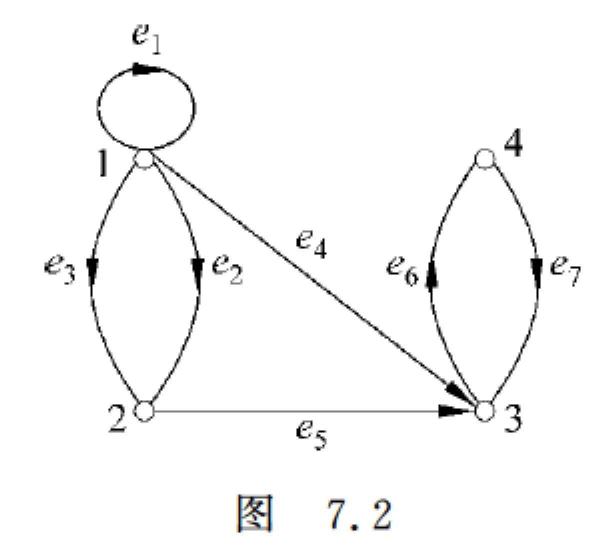


图 7.2

(1) 求 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 D 中顶点 1 到顶点 4 的通路数为多少？

(3) D 中顶点 1 到自身长度为 3 的回路数有多少？

(4) D 中长度为 4 的通路总数为多少？其中有几条回路？

(5) D 中长度小于等于 4 的通路总数为多少？其中有几条回路？

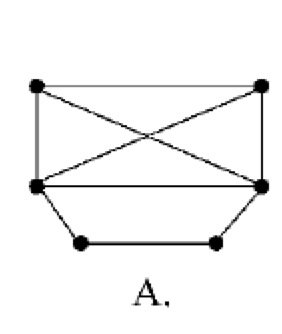
(6) D 是哪类连通图？

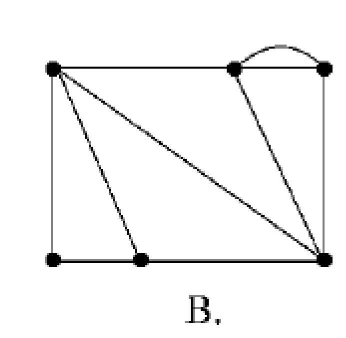
8. 设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其邻接矩阵为

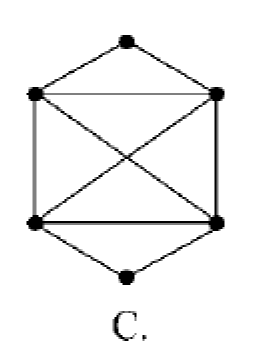
$$A=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

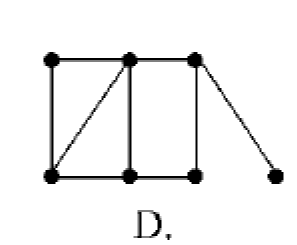
试求 D 中各顶点的入度与出度.

9. 判断下列各图哪些是欧拉图?


A.


B.


C.


D.

10. 某工厂使用一台设备,每年年初要决定是继续使用,还是购买新的,预计该设备第 1 年的价格为 11 万元,以后每年涨 1 万元,使用的第 1 年,第 2 年,…,第 5 年的维修费分别为 5,6,8,11,18 万元.使用 1 年后的残值为 4 万元,以后每使用 1 年残值减少 1 万元.试制订购买维修该设备的 5 年计划,使总支出最小.

第8章 树

树是图论中重要的概念之一，它在计算机科学中的应用非常广泛，本章介绍树的一些基本性质及应用.

8.1 无向树及生成树

定义 8.1.1 连通且无回路的无向图称为**树**，通常用 T 表示一棵树. 树中度数为 1 的点称为**树叶**（或**叶子**），度数大于 1 的顶点称为**分支**（或**内点**）. 每个连通分支都是树的无向图称为**森林**.

下面给出树的一些重要性质.

定理 8.1.1 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，下述命题是等价的.

(1) G 是树；

(2) G 无回路且 $m=n-1$；

(3) G 连通且 $m=n-1$；

(4) G 无回路，但增加一边后得到且仅得一个回路；

(5) G 连通，但删去任一边后就不连通；

(6) 任意两个顶点间有且仅有一条通路.

证明 (1)⇒(2)

设在图 G 中，当 $n=1$ 时，连通无回路，则 G 中边数 $m=0$，显然有 $m=n-1$.

假设 $n=k$ 时命题成立，当 $n=k+1$ 时，因 G 连通无回路，所以至少有一点的度数为 1，在 G 中删去该点及相关联的边得到 k 个顶点的连通且无回路的图，由归纳法假设它有 $k-1$ 条边，故原来有 $(k-1)+1=k$ 条边，从而结论在 $n=k+1$ 时也成立.

(2) ⇒ (3)

只要证连通. 反证法. 若 G 不连通，设 G 的连通分支数为 k，$k>1$. 因为 G 无回路，故每个连通分支是树，设每个连通分支的顶点数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，则由(2)知相应连通分支数的边数为：$n_1-1,n_2-1,\cdots,n_k-1$. 所以图 G 的边数 $m=n_1+n_2+\cdots+n_k-k=n-k<n-1$ 矛盾，故 G 是连通的.

(3) ⇒ (4)

已知图 G 连通且有 $n-1$ 条边. 当 $n=1$ 时，显然无回路但增加一边后得到且仅得一个回路.

假设 $n=k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，因为 G 是连通的，$m=n-1$，故每个顶点有 $d(u)\geqslant 1$，下面证明至少存在一个顶点 u_0 使得 $d(u_0)=1$.

〈反证法〉如果所有顶点 u 有 $d(u)\geqslant 2$，则所有顶点度数之和 $2m\geqslant 2n$，即有 $m\geqslant n$，这与假设 $m=n-1$ 相矛盾. 得证.

删去 u_0 及其关联的边，而得到新图 G'，由归纳假设知 G' 无回路，在 G' 中加入 u_0 及其关联边又得到 G，故 G 是无回路；若在连通图 G 中增加新的边 (u_i,u_j)，则该边与 G 中 u_i 到 u_j 的一条路构成一个回路，则该回路必是唯一的，否则若删去此新边，G 中必有回路，得出矛盾.

(4)⇒(5)任取两顶点 $u,v\in V$，加上边 uv 就构成圈 $ux\cdots yvu$，则原来 u 到 v 之间就有一条通路 $ux\cdots yvu$，故 G 连通. 再由 G 无圈可知删去 G 的任意一条边都会使 G 不连通.

(5)⇒(6)由 G 是连通的可知，G 中任意两点间均有路. 往证任意两点间仅有一条路. 如若不然，如果两顶点间有两条通路，则该图必有圈，进而删去此圈上的一条边后，G 仍是连通的，这与(5)矛盾.

(6)⇒(1)因为 G 中任意两点间均有路，故 G 连通. 若中有圈，则该圈上的任意两点之间至少有两条不同的路，这与(6)矛盾.

定理 8.1.2 设 G 是 n 阶非平凡的无向树，则 G 中至少有两片树叶.

证明 设 G 有 x 片树叶，由握手定理及定理 8.1.1 可知

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geqslant x+2(n-x).$$

由上式解得 $x\geqslant 2$.

例 8.1.1 下面给出的 2 组数都可充当无向简单图的度数列，其中哪些可以成为无向树的度数列？并对每个这样的度数列至少画出 3 棵非同构的无向树.

(1) 1,1,2,2,3,3,4,4;

(2) 1,1,1,1,2,2,3,3.

解 求解本题的依据是无向树的性质，主要是阶数 n 与边数 m 的关系，即 $m=n-1$. 另外还要使用握手定理.

所给 2 个数列的长度都是 8，因而所对应的无向图的阶数 $n=8$. 如果数列能充当无向树的度数列，必有边数 $m=n-1=7$. 设数列中元素为 $d_1,d_2,\cdots,d_8$，由握手定理必有 $\sum_{i=1}^{8}d_i=2m=14$.

(1) $\sum_{i=1}^{8}d_i=20\neq 14$，故数列 1,1,2,2,3,3,4,4 不能充当无向树度数列.

(2) $\sum_{i=1}^{8}d_i=14$，以这个数列 1,1,1,1,2,2,3,3 为度数列能画出 5 棵非同构的无向树，如图 8.1.1 所示.

有些连通图，本身不是树，但它的某些子图是树，一个图可能有许多子图是树，其中重要的是生成树.

定义 8.1.2 如果无向图 G 的生成子图 T 是一棵树，则称这棵树 T 为 G 的**生成树**. 称 T 中的边为**树枝**，在 G 中而不在 T 中的边称**弦**，T 在 G 中的补图(即 $G-E(T)$)称为生成树 T 的**余树**.

注 T 的余树不一定连通，也不一定不含回路. 如图 8.1.2 所示，实边图为该图的一棵生成树 T，余树为虚边所示，它不连通，同时含有回路.

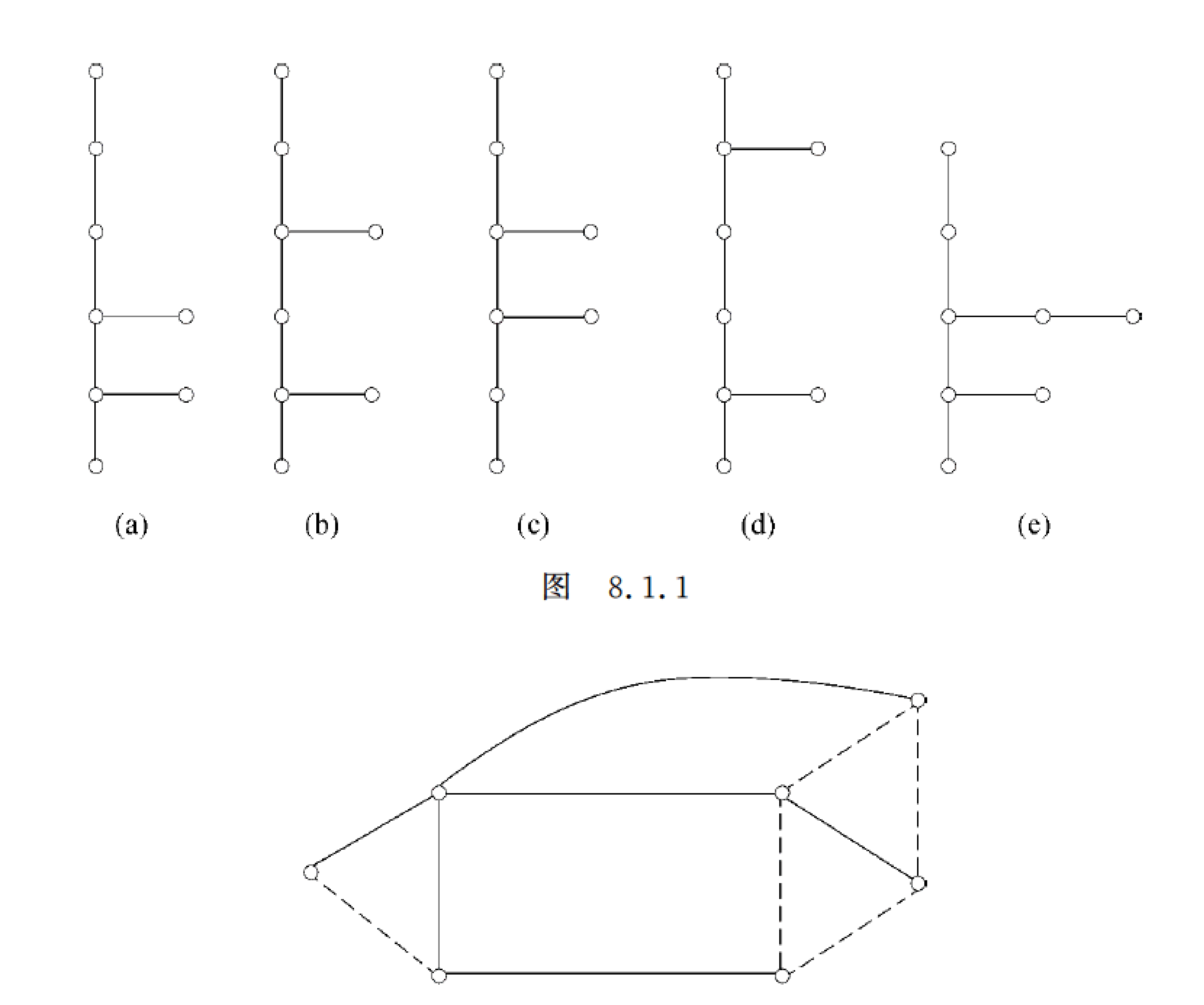


图 8.1.1

图 8.1.2

一个无向连通图 G,如果 G 是树,则它的生成树是唯一的,就是 G 本身;如果 G 不是树,那么它的生成树就不唯一了.

定理 8.1.3 任何连通图 G 至少存在一棵生成树.

证明 如果 G 中无回路,G 本身就是生成树. 如果 G 中存在回路 C,去掉 C 中一条边,不影响 G 中连通性. 若 G 连通,并设 T 是 G 的最小的连通生成子图,由 T 的定义知 T 连通但删去任一边后就不连通. 从而由定理 8.1.1 知 T 是树,进而是 G 的生成树.

定理 8.1.4 设 T 是无向连通图 G 的生成树,则:

(1) G 的任何边割集与 T 至少有一条公共边;

(2) G 的任何回路与 T 的余树至少有一条公共边.

证明 (1) 因为 G 的任何边割集的边都被去掉后,图 G 就不连通了. 而 G 的生成树 T 是 G 的连通生成子图,故 G 的任何边割集至少有一条边要留在树 T 中.

(2) 因为 T 是树,即不含回路,从而 G 的任何回路中至少有一条边不在 T 中,再由余树的定义可知该边在 T 的余树中.

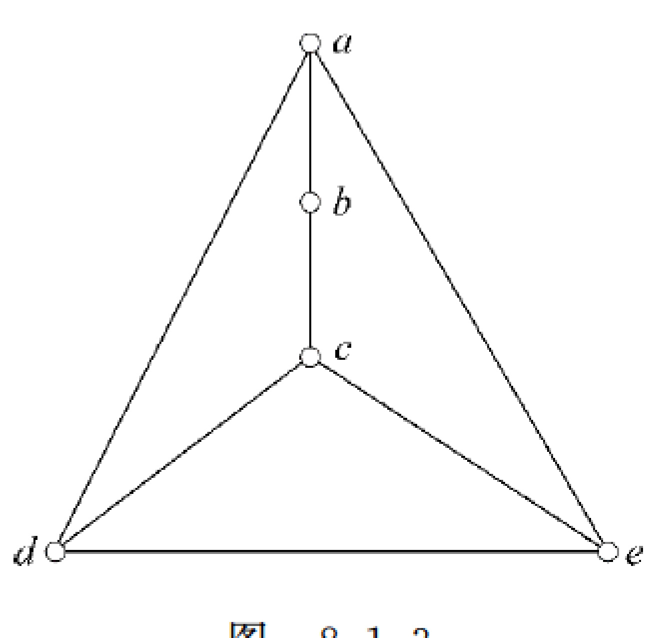


图 8.1.3

生成树有其一定的实际意义.

例 8.1.2 某地要建 5 个工厂,拟修筑道路连接这 5 处. 经勘测其道路可依图 8.1.3 的无向边铺设. 为使这 5 处都有道路相通,问至少要铺设几条路? 怎样铺设?

解 此问题就是找图 8.1.3 的生成树问题,由图 8.1.3 可知,共有 5 个顶点,所以至少要铺设 4 条路才行. 可按图 8.1.4 所示的线路铺设,即图 8.1.4 是图 8.1.3 的两个生成树.

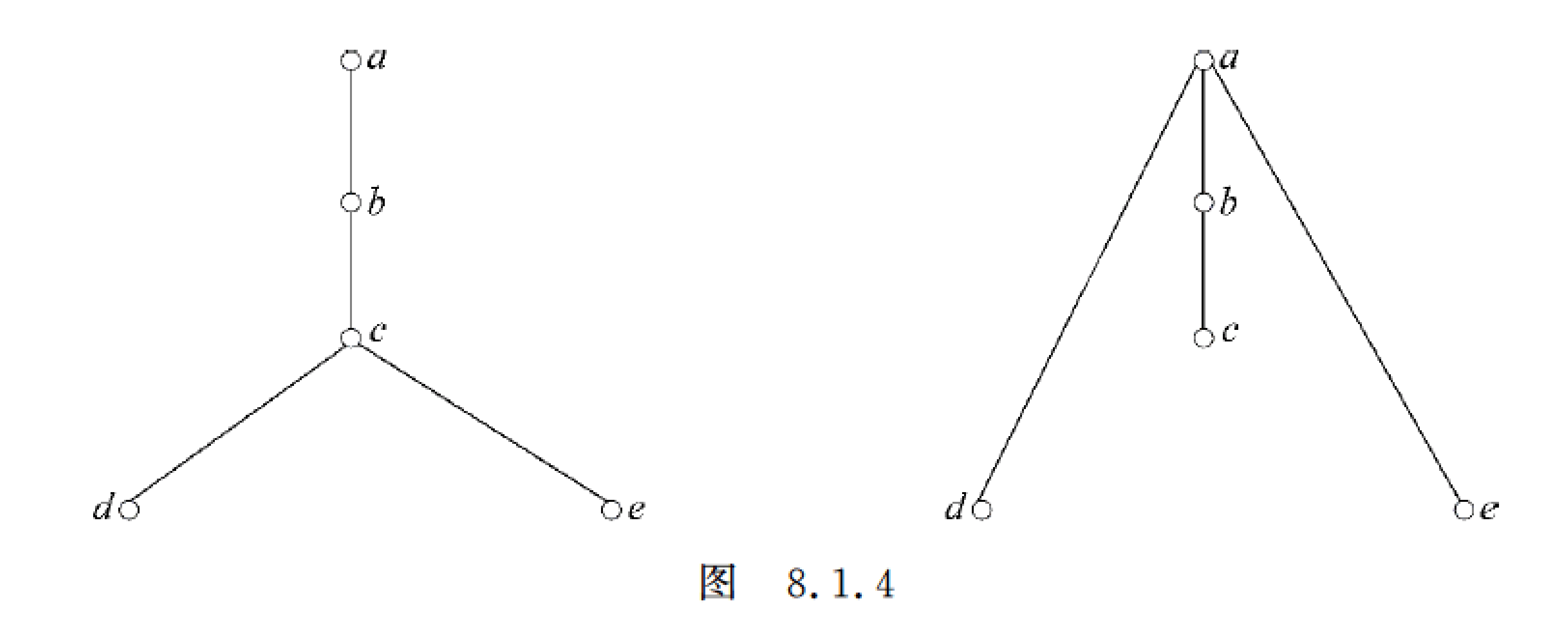


图 8.1.4

在例 8.1.2 中，如果要求铺设的道路总长度最短，这样既能节省费用，又能缩短工期，这个问题就是最小生成树问题.

下面我们考查赋权图的生成树问题.

假设要建造一个连接若干城镇的铁路网络. 已知城镇 v_i 和 v_j 之间直通线路的造价为 c_{ij}，试设计一个总造价最小的铁路网络.

把这个城镇看作是具有权 $W(v_iv_j)=c_{ij}$ 的赋权图 G 的顶点，显然问题就转化为：在赋权图 G 中，找出具有最小权的连通生成子图. 由于权表示造价，当然是非负的，所以可以假定最小权生成子图是 G 的一棵生成树 T . 赋权图的最小权生成树称为**最小生成树**.

一个无向图的最小生成树不是唯一的，同样地，一个赋权图的最小生成树也不一定是唯一的，求赋权图的最小生成树的方法很多，这里主要介绍克鲁斯卡尔(Kruskal)算法.

该算法是克鲁斯卡尔在 1965 年将构造生成树的避圈法推广到求最小生成树的结果，其要点是，在与已选取的边不构成回路的边中选取最小者.

克鲁斯卡尔算法：

(1) 在 G 中选取最小权边 e_1，置 $i=1$.

(2) 当 $i=n-1$ 时，算法结束，否则转(3).

(3) 设已选取的边为 $e_1e_2\cdots e_i$，在 G 中选取不同于 $e_1e_2\cdots e_i$ 的边 e_{i+1}，使$\{e_1e_2\cdots e_i\, e_{i+1}\}$中无回路且 e_{i+1} 是满足此条件的最小权边.

(4) 置 $i=i+1$，转(2).

这个算法的正确性是可以证明的，其证明过程略. 在算法的步骤(1)和(3)中，若满足条件的最小权边不止一条，则可以从中任选一条，这样就会产生不同的最小生成树.

定理 8.1.5 由克鲁斯卡尔算法构造的树 $T^*=G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{v-1}\}]$都是最小生成树.

证明 反证法. 对 G 的任何异于 T^* 的生成树 T，用 $f(T)$记使 e_i 不在 T 中的最小 i 值. 现在假设 T^* 不是最优树，T 是一棵使 $f(T)$尽可能大的最优树.

假设 $f(T)=k$，也就是说，同时在 T 和 T^* 中，但 e_k不在 T 中. 由定理 8.1.1，$T+e_k$包含唯一的圈 C . 设 $e_k{}'$ 是 C 的一条边，它在 T 中而不在 T^* 中. 由定理 7.2.4，e_k'不是 $T+e_k$ 的割边. 因此 $T'=(T+e_k)-e_k'$是具有 $v-1$ 条边的连通图，所以它是 G 的另一棵生成树. 显然

$$w(T')=w(T)+w(e_k)-w(e_k'). \tag{8.1.1}$$

在克鲁斯卡尔算法中选出的边 e_k，是使 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$ 为无圈图的权最小的边. 由于 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e_k'\}]$是 T 的子图，它也是无圈的. 于是有

$$w(e_k') \geqslant w(e_k). \tag{8.1.2}$$

由式(8.1.1)和式(8.1.2),有

$$w(T') \leqslant w(T),$$

所以 T' 也是一棵最优树. 然而

$$f(T') > k = f(T).$$

这与 T 的选法矛盾. 因此 $T=T^*$,从而 T^* 确实是一棵最小生成树.

例 8.1.3 用克鲁斯卡尔算法求图 8.1.5 中(a)的赋权图的最小生成树.

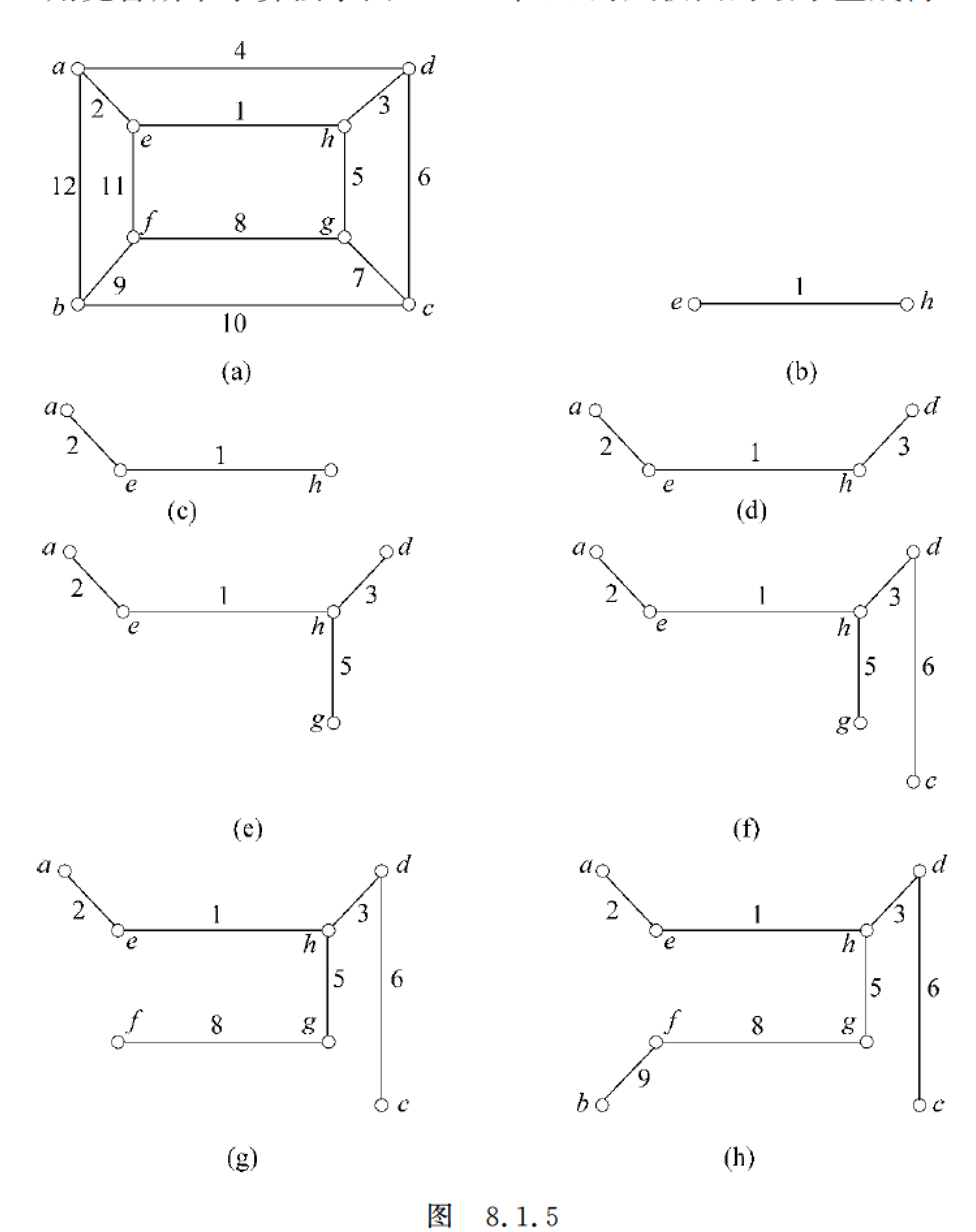


图 8.1.5

因为图中 $n=8$,所以按算法要执行 $n-1=7$ 次,其过程见图 8.1.5 中(b)~(h)所示.

8.2 根树及其应用

前面我们讨论的树,都是无向图中的树,下面我们简单地讨论有向图中的树.

定义 8.2.1 如果一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树,那么,这个有向图称为**有向图树**.

例如图 8.2.1 所示为一棵有向树.

定义 8.2.2 一棵有向树,如果恰有一个顶点的入度为 0,其余所有顶点的入度都为 1,则称为**根树**. 入度为 0 的顶点称为根,出度为 0 的顶点称为叶,出度不为 0 的顶点称为**分枝点**或**内点**.

例如图 8.2.2 表示一棵根数,其中 v_1 为根,v_1,v_2,v_4,v_8,v_9 为分枝点,其余结点为叶.

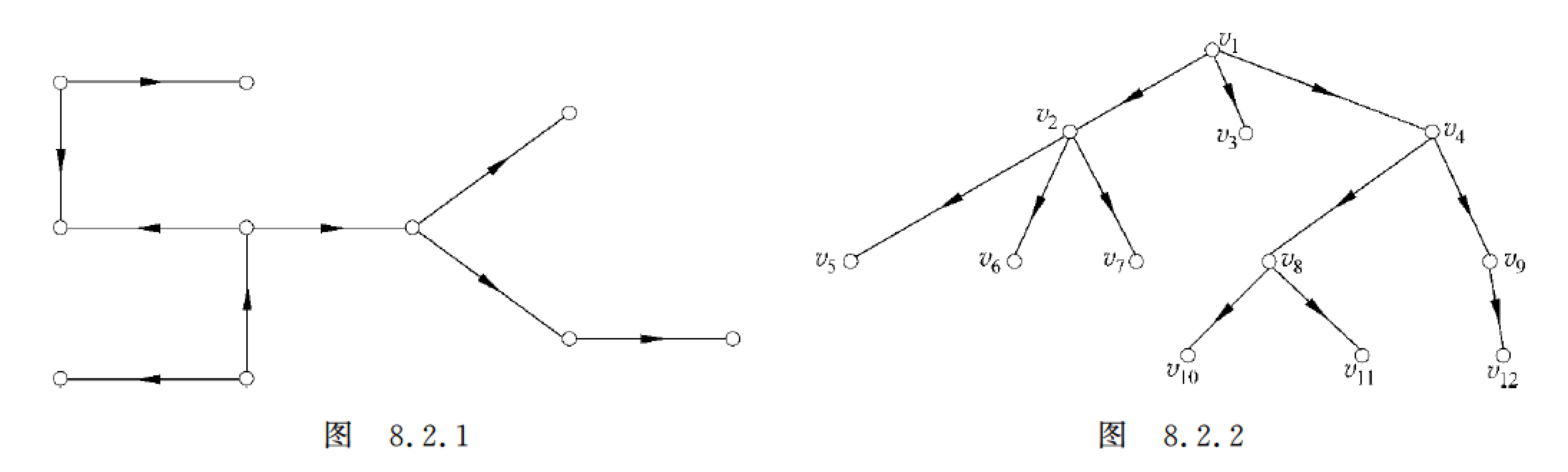


图 8.2.1　　　　图 8.2.2

在根树中,任一结点 v 的层次,就是从根到该结点的单向通路长度,例如图 8.2.2 中有三个结点层次为 1,有五个结点层次为 2,有三个结点层次为 3.

从根树的结构中还可以看到,树中的每个顶点都可看作是原来树中的某一棵子树的根,由此可知,根树亦可递归定义.

定义 8.2.3 根树包含一个或多个顶点,这些顶点中某一个称为根,其他所有顶点被分成有限个**子根树**.

这个定义把 n 个顶点的根树用顶点数少于 n 的根树来定义,最后得到每一棵树都是一个顶点的根树,它们就是原来那棵树的叶.

对于一棵根树,可以有树根在下或树根在上的两种不同画法,如图 8.2.3 所示.

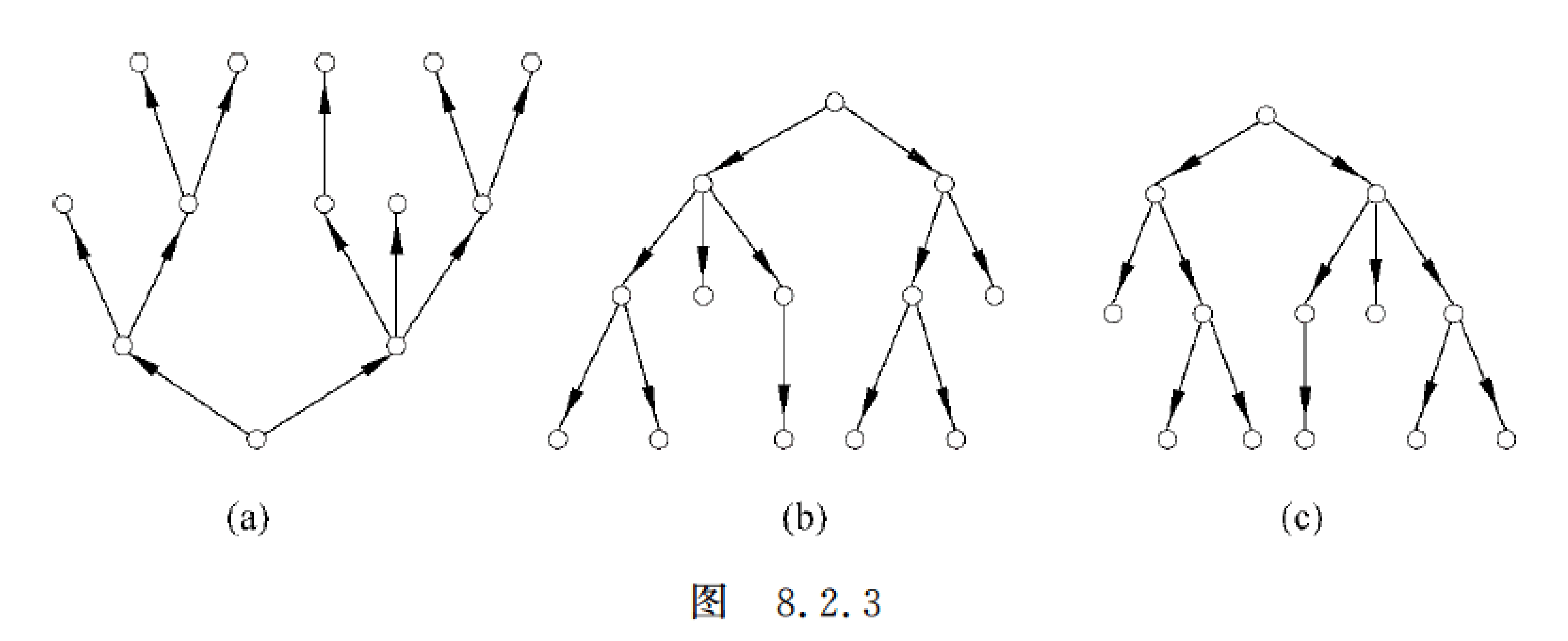


图 8.2.3

图 8.2.3(a)是树根的自然表示法,即树从它的根向上生长. 图 8.2.3(b)和图 8.2.3(c)都是有树根向下生长,它们是同构图,其差别仅在每一层上的结点从左到右出现的次序不同,为此,今后要用明确的方式,指明根树中顶点或边的次序,这种树称为有序树.

设 a 是一棵根树的分枝点,假若从 a 到 b 有一条边,则顶点 b 称为 a 的“儿子”,或称 a 为 b 的“父亲”. 假若从 a 到 c 有一条单向通路,称 a 为 c 的“祖先”或 c 为 a 的“后裔”. 同一个分枝点的“儿子”称为“兄弟”.

定义 8.2.4 在根树中,若每一个顶点的出度小于或等于 m,则称这棵树为 m 叉树. 如

果每一个顶点的出度恰好等于 m 或零，则称这棵树为**完全 m 叉树**，若其所有树叶层次相同，称为正则 m 叉树. 当 $m=2$ 时，称为**二叉树**.

有很多实际问题可用二叉树或 m 叉树表示.

例如，M 和 E 两人进行网球比赛，如果一人连胜两盘或共胜三盘就获胜，比赛结束. 图 8.2.4 表示了比赛中可能发生的一种情况，即

$$MM,\quad MEMM,\quad MEMEM,\quad MEMEE,\quad MEE,\quad EMM,\quad EMEMM,\quad EMEME,\quad EE.$$

我们要指出，任何一棵有序树都可用把它改写为一棵树对应的二叉树. 如图 8.2.5(a)中的 m 叉树可用下述方法改写为二叉树.

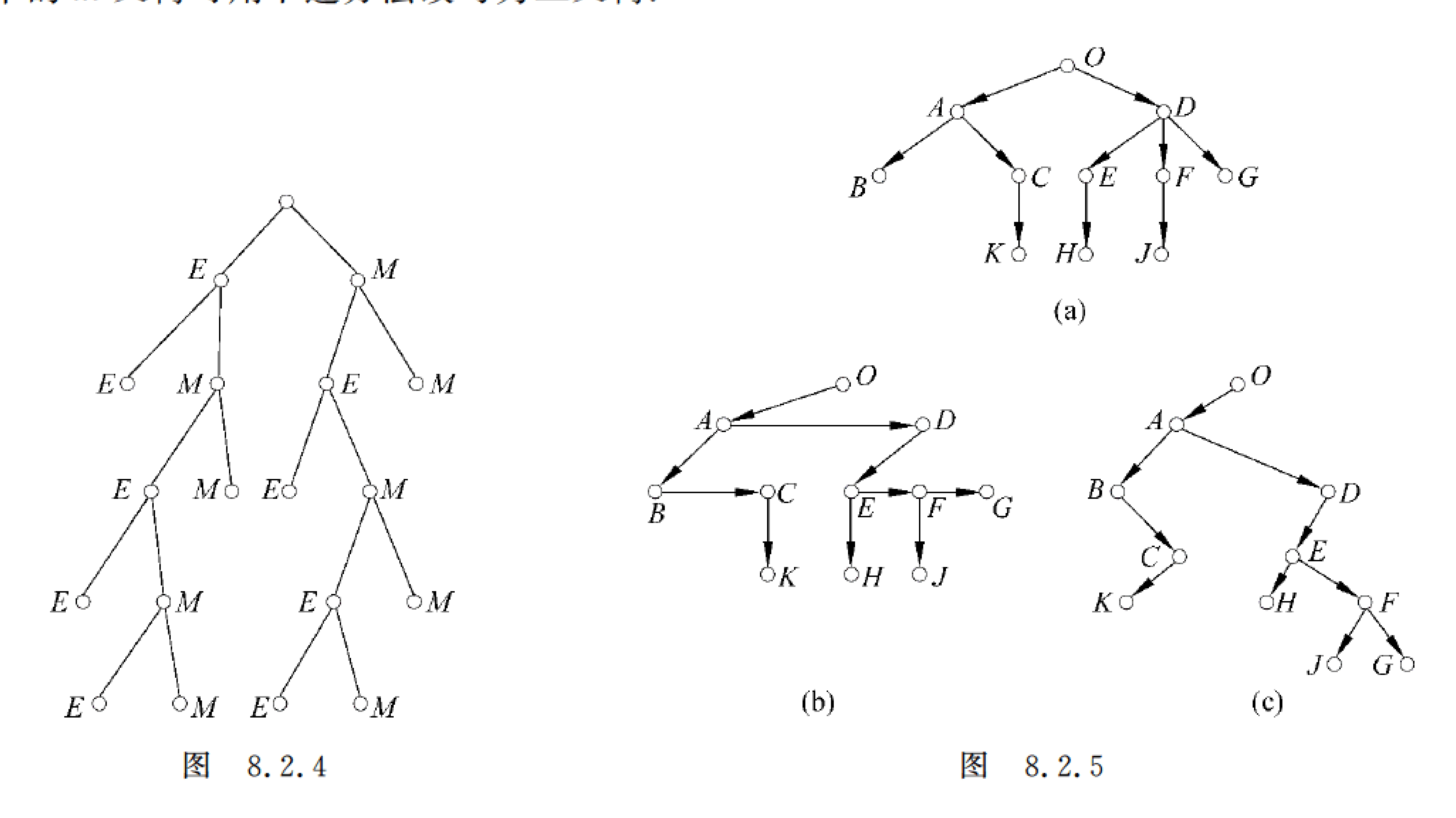


图 8.2.4　　　图 8.2.5

(1) 除了最左边的分枝点外，删去所有从每一个顶点长出的分枝. 在同一层次中，兄弟顶点之间用从左到右的有向边连接，如图 8.2.5(b)所示.

(2) 选定二叉树的左儿子和右儿子如下：直接处于给定顶点下面的顶点，作为左儿子，对于同一水平线上与给定顶点右邻的顶点，作为右儿子，以此类推，如图 8.2.5(c)所示.

用二叉树表示有序根树的方法，可以推广到有序森林上去，如图 8.2.6 所示.

在树的实际应用中，我们经常研究完全 m 叉树.

定理 8.2.1 设有完全 m 叉树，其树叶数为 t，分枝点数为 i，则 $(m-1)i=t-1$.

证明 若把 m 叉树看作是每局有 m 位选手参加比赛的单淘汰赛计划表，树叶数 t 表示参加比赛的选手数，分枝点数 i 表示比赛的局数，因为每局比赛将淘汰 $(m-1)$ 位选手，故比赛结果共淘汰 $(m-1)i$ 位选手，最后剩下一位冠军，因此 $(m-1)i+1=t$，即 $(m-1)i=t-1$.

例 8.2.1 设有 28 盏电灯，拟公用一个电源插座，问需用多少块具有四插座的接线板.

解 将四叉树的每个分枝点看作是具有四插座的接线板，树叶看作电灯，则有 $(4-1)i=28-1$，$i=9$，所以，需要 9 块四插座的插线板.

例 8.2.2 假设有一台计算机，它有 1 条加法指令，可计算 3 个数的和，如果要计算 9 个数的和，至少要执行几次加法指令.

解 若把这 9 个数看作是完全三叉数的 9 片树叶，则有 $(3-1)i=9-1$，$i=4$. 所以，需

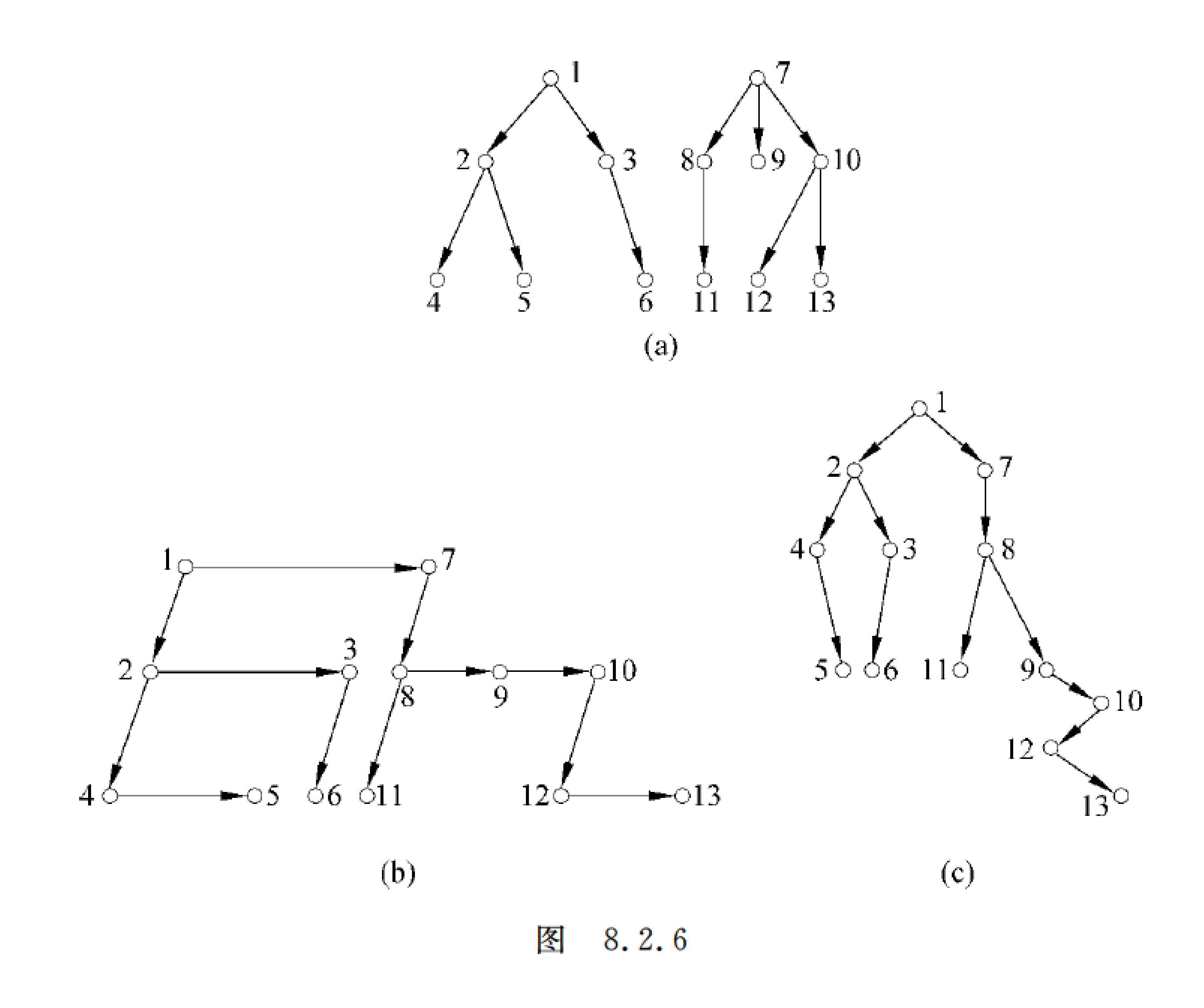


图 8.2.6

要执行 4 次加法命令.

在计算机的应用中,还常常要考虑二叉树的通路长度问题.

定义 8.2.5 在根树中,一个顶点的通路长度,就是从树根到此顶点的通路中的边数. 我们把分枝点的通路长度成为**内部通路长度**,树叶的通路长度称为**外部通路长度**.

定理 8.8.2 若完全二叉树有 n 个分枝点,且内部通路长度的总和为 I,外部通路长度的总和为 E,则

$$E = I + 2n.$$

证明 对分枝点数目 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时, $E=2, I=0$,故 $E=I+2n$ 成立.

假设当 $n=k-1$ 时成立,即 $E'=I'+2(k-1)$.

当 $n=k$ 时. 若删去一个分枝点 v,该分枝点与根的通路长度为 l,且 v 的两个儿子是树叶,得到新树 T'. 将 T' 与原树比较,它减少了二片长度为 $l+1$ 的树叶和一个长度为 l 的分枝点,因为 T' 有 $(k-1)$ 个分枝点,故 $E'=I'+2(k-1)$. 但在原树中,有 $E=E'+2(l+1)-l=E'+l+2, I=I'+l$,代入上式得 $E-l-2=I-l+2(k-1)$,即 $E=I+2k$.

二叉树的一个重要应用就是最优树问题.

给定一组权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$,不妨设 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$. 设有一棵二叉树,共有 t 片树叶,分别带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$,该二叉树称为带权二叉树.

定义 8.2.6 在带权二叉树中若带权为 w_i 的树叶,其通路长度为 $L(w_i)$, 我们把 $w(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i)$ 称该带权二叉树的**权**. 在所有带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的二叉树中, $w(T)$ 最小的那根树,称为**最优树**.

假定给定了一组权, $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 为了找到最优树,我们先证明下面的定理.

定理 8.2.3 设 T 为带权 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$ 的最优树，则：

(1) 带权 w_1, w_2 的树叶 v_{w_1}, v_{w_2} 是兄弟.

(2) 以树叶 v_{w_1}, v_{w_2} 为儿子的分枝点，其通路长度最长.

证明 设在带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优树中，v 是通路长度最长的分枝点，v 的儿子分别带权 w_x 和 w_y，故有

$$L(w_x) > L(w_1), \quad L(w_y) > L(w_2).$$

若 $L(w_x) > L(w_1)$，将 w_x 和 w_1 对调，得到新树 T'，则

$$\begin{aligned}\omega(T') - \omega(T) &= (L(\omega_x) \cdot \omega_1 + L(\omega_1) \cdot \omega_x) - (L(\omega_x) \cdot \omega_x + L(\omega_1) \cdot \omega_1) \\ &= L(w_{x1})(w_1 - w_x) + L(w_1)(w_x - w_1) \\ &= (w_x - w_1)(L(w_1) - L(w_x)) < 0,\end{aligned}$$

即 $w(T') < w(T)$，与 T 为最优树的假设矛盾. 故 $L(w_x) = L(w_1)$.

同理可证 $L(w_x) = L(w_2)$. 因此 $L(w_1) = L(w_2) = L(w_x) = L(w_y)$. 分别将 w_1, w_2，与 w_x, w_y 对调得到一颗最优树，其中带权 w_1 和 w_2 的树叶是兄弟.

定理 8.2.4 设 T 为带权 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$ 的最优树，若将以带权 w_1 和 w_2 的树叶为儿子的分枝点改为带权 $w_1 + w_2$ 的树叶，得到一棵新树 T'，则 T' 也是最优树.

证明 根据题设，有

$$w(T) = w(T') + w_1 + w_2.$$

若 T' 不是最优树，则另有一棵带权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优树 T''. 对 T'' 中带权 $w_1 + w_2$ 的树叶 $v_{w_1+w_2}$ 生成两个儿子，得到新树 $\hat{T}$，则

$$w(\hat{T}) = w(T'') + w_1 + w_2.$$

因为 T'' 是带权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优树，故

$$w(T'') < w(T').$$

如果 $w(T'') < w(T')$，则 $w(\hat{T}) < w(T)$，与 T 是带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 最优树的假设矛盾，因此

$$w(T'') = w(T'),$$

T' 是带权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 的最优树.

根据上述两条定理，要画一棵带有 t 个权的最优树，可简化为画一棵带有 $t-1$ 个权的最优树，而这又可简化为画一棵带有 $t-2$ 个权的最优树，以此类推. 具体做法是：首先找出两个最小的 w 值，设为 w_1 和 w_2，然后对 $t-1$ 个权 $w_1 + w_2, w_3, \cdots, w_t$ 求作一棵最优树，并且将这棵最优树中的分枝点 $\boxed{w_1 + w_2}$ 代之以 (图：一个分枝点，两个儿子 w_1、w_2)，以此类推.

例 8.2.3 设有一组权 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41. 求相应的最优树.

解 首先组合 2+3，并寻找 5,5,7, 11,⋯,41 的最优树；然后组合 5+5，以此类推. 这个过程综合为

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
	5	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
		10	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
			17	11	13	17	19	23	29	31	37	41
			17		24	17	19	23	29	31	37	41
					24	34	19	23	29	31	37	41
					24	34		42	29	31	37	41
						34		42	53	31	37	41
								42	53	65	37	41
								42	53	65		78
									95	65		78
									95			143
												238

它对应的最优树如图 8.2.7 所示.

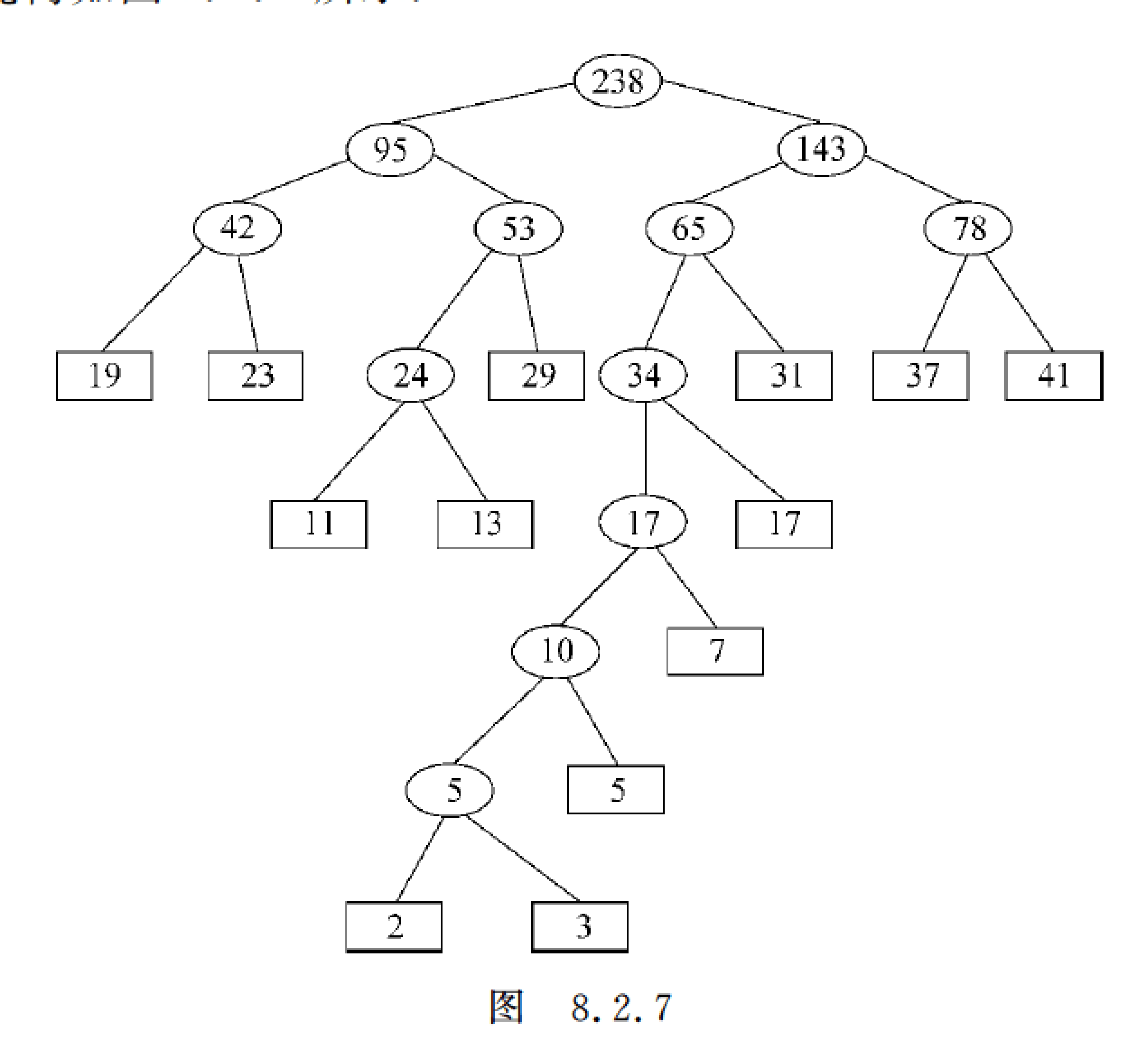


图 8.2.7

习 题 8

1. 一棵树有两个点度数为 2,一个顶点度数为 3,三个顶点度数为 4,问有几个 1 度顶点?
2. 一棵树有 2 个 4 度顶点,3 个 3 度顶点,其余顶点都是叶子,问叶子数是多少?
3. 从简单有向图的邻接矩阵如何去判定它是否为根数. 如果是根数,如何确定它的树根和数叶.
4. 给定权 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100.

   (1) 构造一个最优的二叉树.

   (2) 构造一个最优的三叉树.

   (3) 说明如何构造一棵最优的 t 叉树.